Relazioni fra minori di taglia fissata

MATTEO VARBARO

Dipartimento di Matematica, Università di Genova

Da una collaborazione con Winfried Bruns e Aldo Conca

RELAZIONI FRA MINORI DI TAGLIA FISSATA

Introduzione al problema

Consideriamo la matrice ($m \leq n$):

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

dove le x_{ij} sono indeterminate su un campo k di caratteristica 0.

DOMANDA: Fissato $t \leq m$, quali relazioni algebriche intercorrono fra i t-minori di X?

RELAZIONI FRA MINORI DI TAGLIA FISSATA

Equivalentemente, quali equazioni definiscono la varietà affine:

$$Z = \overline{\{\wedge^t \phi : \phi \in \mathrm{Hom}_k(W, V)\}} \subset \mathbb{A}^N,$$

dove $\dim_k V = m$, $\dim_k W = n$ e $N = \binom{m}{t}\binom{n}{t}$. Se $t = m$, Z è il cono affine sulla Grassmanniana $G(m, n)$, e le equazioni desiderate sono le relazioni di Plücker (in particolare quadriche). Se $t < m$, ha ancora senso definire le relazioni di Plücker, ed esse danno ancora luogo ad equazioni che si annullano su Z. Però non bastano più a definire Z.

RELAZIONI FRA MINORI DI TAGLIA FISSATA

Introduzione al problema

Per esempio, in una matrice 3×4 la seguente relazione fra 2-minori è una cubica minimale:

$$\det \begin{pmatrix} [12|12] & [12|13] & [12|14] \\ [13|12] & [13|13] & [13|14] \\ [23|12] & [23|13] & [23|14] \end{pmatrix} = 0$$

L'anello delle coordinate della varietà descritta è la sottoalgebra di $\mathrm{Sym}(V \otimes W^*)$, generata da $\bigwedge^t V \otimes \bigwedge^t W^*$, sia essa $A_t(m,n)$. Quello che vogliamo fare è trovare i generatori minimali di $J_t(m,n)$, il nucleo dell'omomorfismo:

$$S_t(m,n) = \mathrm{Sym}\left(\bigwedge^t V \otimes \bigwedge^t W^*\right) \longrightarrow A_t(m,n).$$

RELAZIONI FRA MINORI DI TAGLIA FISSATA

Introduzione al problema

S_t, A_t, J_t e $J_t \otimes_{S_t} k$ sono G-rappresentazioni, dove

$$G = \mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(W)$$

PROBLEMA: Trovare la decomposizione in G-rappresentazioni irriducibili di $J_t \otimes_{S_t} k$.

Questo problema si è rivelato molto difficile: infatti non riusciamo a risolverlo! Però crediamo di avere intuito la risposta. In questo talk decomporremo un sottomodulo di $J_t \otimes_{S_t} k$, e poi daremo delle ragioni per credere che questo sottomodulo sia già tutto $J_t \otimes_{S_t} k$.

RELAZIONI FRA MINORI DI TAGLIA FISSATA

Decomposizione di A_t

Una G-decomposizione di $A_t(m,n)$ è stata trovata da De Concini, Eisenbud e Procesi: Diremo che una partizione $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ di dt è *ammissibile* se $k \leq d$.

$$\text{DEP:} \quad A_t(m,n)_d \cong \bigoplus_{\lambda \vdash td} L_\lambda V \otimes L_\lambda W^*$$

dove i λ sono partizioni ammissibili tali che $\lambda_1 \leq m$.

Emerge una prima differenza col caso della Grassmanniana:

$t = m \iff$ la G-rappresentazione $A_t(m,n)_d$ è irriducibile $\forall\ d \in \mathbb{N}$

RELAZIONI FRA MINORI DI TAGLIA FISSATA

Per decomporre $J_t \otimes_{S_t} k$ potrebbe essere utile decomporre J_t.

Grazie a (DEP), decomporre J_t equivale a decomporre S_t.

Purtroppo decomporre S_t è estremamente difficile: infatti è equivalente a decomporre $L_\mu\left(\bigwedge^t V\right)$ per ogni partizione μ.

Questo si può vedere tramite la formula di Cauchy:

$$(S_t)_d = \mathrm{Sym}^d(E \otimes F^*) \cong \bigoplus_{\mu \vdash d} L_\mu E \otimes L_\mu F^*.$$

dove $E = \bigwedge^t V$, $F = \bigwedge^t W$ e l'azione è di $H = \mathrm{GL}(E) \times \mathrm{GL}(F)$.

RELAZIONI FRA MINORI DI TAGLIA FISSATA

Siccome $(J_t)_1 = 0$, abbiamo che $(J_t \otimes_{S_t} k)_2 = (J_t)_2$. Dunque descrivere le relazioni quadratiche minimali fra t-minori equivale a decomporre $(J_t)_2$. Grazie a (DEP) ciò equivale a decomporre $(S_t)_2$. Questo non è un'impresa difficile, e si ottiene:

$$J_t(m,n)_2 \cong \bigoplus_{p,q} L_{\tau_p} V \otimes L_{\tau_q} W^*$$

dove $\tau_i = (t+i, t-i) \vdash 2t$, $p = 0, \ldots, \min\{t, m-t\}$, $q = 0, \ldots, \min\{t, n-t\}$, $p \neq q$ and $p+q$ is even.

RELAZIONI FRA MINORI DI TAGLIA FISSATA

Relazioni quadratiche

Soffermiamoci un secondo nel caso $t = 3$ e $m \geq 6$. Le partizioni in gioco sono: $\tau_0 = (3,3)$, $\tau_1 = (4,2)$, $\tau_2 = (5,1)$ e $\tau_3 = (6)$; dunque $(J_3)_2$ si decompone come:

$$(L_{\tau_0} V \otimes L_{\tau_2} W^*) \oplus (L_{\tau_2} V \otimes L_{\tau_0} W^*) \oplus (L_{\tau_1} V \otimes L_{\tau_3} W^*) \oplus (L_{\tau_3} V \otimes L_{\tau_1} W^*)$$

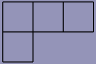
I primi due addendi diretti corrispondono a relazioni di Plücker, ma gli altri no. Il polinomio "corrispondente a $L_{\tau_1} V \otimes L_{\tau_3} W^*$" è:

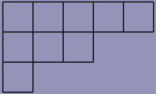
$$\sum_{\substack{\sigma \in \Sigma_2 \\ \rho \in \Sigma_6}} (-1)^\sigma (-1)^\rho [1, 2, 2 + \sigma(1) | \rho(1), \rho(2), \rho(3)][1, 2, 2 + \sigma(2) | \rho(4), \rho(5), \rho(6)].$$

RELAZIONI FRA MINORI DI TAGLIA FISSATA

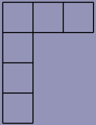
Formula di Pieri

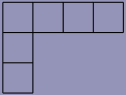
Data $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \vdash d$, sia $\tilde{\lambda} = (\lambda_1 + t, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$. Se $\mu \vdash d + t$ è tale che $\lambda \subset \mu \subset \tilde{\lambda}$, diremo che μ è un successore di λ e che λ è un predecessore di μ. Ad esempio se $t = 2$

$\lambda =$ 

$\tilde{\lambda} =$ 

La partizione di sotto γ non è un successore di λ, mentre μ lo è:

$\gamma =$ 

$\mu =$ 

RELAZIONI FRA MINORI DI TAGLIA FISSATA

Formula di Pieri

La formula di Pieri dice che si ha un isomorfismo di $\mathrm{GL}(V)$-moduli:

$$L_\lambda V \otimes \left(\bigwedge^t V\right) \cong \bigoplus_{\mu \text{ successore di } \lambda} L_\mu V.$$

In particolare, se $L_\gamma V \otimes L_\lambda W^*$ compare nella decomposizione di $(S_t)_d = \mathrm{Sym}^d(E \otimes F^*)$, sia γ che λ sono ammissibili.

Inoltre, usando (DEP), si ha: Sia $L_\gamma V \otimes L_\lambda W^* \subset S_t$ e (γ_1, λ_1), ..., (γ_r, λ_r) i bi-predecessori di (γ, λ) tali che $L_{\gamma_i} V \otimes L_{\lambda_i} W^* \subset S_t$. Se $\gamma_i = \lambda_i$ e $L_{\gamma_i} V \otimes L_{\lambda_i} W^*$ appare in S_t con molteplicità 1 e $\gamma \neq \lambda$, allora $L_\gamma V \otimes L_\lambda W^*$ è un addendo diretto di $J_t \otimes_{S_t} k$.

RELAZIONI FRA MINORI DI TAGLIA FISSATA

Cubiche minimali

Per $u = 1, \ldots, \lfloor t/2 \rfloor$, definiamo le partizioni di $3t$:

$$\gamma_u = (t+u, t+u, t-2u) \quad \lambda_u = (t+2u, t-u, t-u)$$

e per $v = 2, \ldots, \lceil t/2 \rceil$, consideriamo le partizioni di $3t$:

$$\rho_v = (t+v, t+v-1, t-2v+1) \quad \sigma_v = (t+2v-1, t-v+1, t-v)$$

Si verifica che γ_u e λ_u hanno un solo predecessore ammissibile, che per altro è lo stesso, cioè $\tau_u = (t+u, t-u)$. Ciò, per quanto detto nella slide precedente, implica che $L_{\gamma_u} V \otimes L_{\lambda_u} W^* \subset J_t \otimes_{S_t} k$.

Per quel che riguarda ρ_v e σ_v, si verifica che essi hanno entrambe due predecessori ammissibili, che per altro sono gli stessi, ovvero $\tau_v = (t+v, t-v)$ e $\tau_{v-1} = (t+v-1, t-v+1)$. Siccome

$$L_{\tau_v} V \subset \operatorname{Sym}^2 E \iff L_{\tau_{v-1}} V \subset \bigwedge^2 E,$$

gli unici bi-predecessori di (ρ_v, σ_v) "in S_t" sono (τ_v, τ_v) e (τ_{v-1}, τ_{v-1}). Inoltre si dimostra che $L_{\rho_v} V, L_{\sigma_v} V \subset L_{(2,1)} E$. Poiché

$$(S_t)_3 \cong \left(\operatorname{Sym}^3 E \otimes \operatorname{Sym}^3 F^*\right) \oplus \left(L_{(2,1)} E \otimes L_{(2,1)} F^*\right) \oplus \left(\bigwedge^3 E \otimes \bigwedge^3 F^*\right),$$

concludiamo che $L_{\rho_v} V \otimes L_{\sigma_v} W^* \subset J_t \otimes_{S_t} k$.

RELAZIONI FRA MINORI DI TAGLIA FISSATA

Congettura

Congetturiamo che $J_t \otimes_{S_t} k$ ha la seguente decomposizione:

$$\bigoplus_{p=0}^{t} \bigoplus_{\substack{q=0 \\ q \neq p \\ p+q \ \text{even}}}^{t} L_{\tau_p} V \otimes L_{\tau_q} W^*$$

$$\bigoplus$$

$$\bigoplus_{u=1}^{\lfloor t/2 \rfloor} \Big((L_{\gamma_u} V \otimes L_{\lambda_u} W^*) \oplus (L_{\lambda_u} V \otimes L_{\gamma_u} W^*) \Big) \oplus \bigoplus_{v=2}^{\lceil t/2 \rceil} \Big((L_{\rho_v} V \otimes L_{\sigma_v} W^*) \oplus (L_{\sigma_v} V \otimes L_{\rho_v} W^*) \Big)$$

In particolare, per definire Z bastano quadriche e cubiche.

RELAZIONI FRA MINORI DI TAGLIA FISSATA

Risultati

In direzione della precedente congettura dimostriamo:

1. Uguaglianza per $(J_t \otimes_{S_t} k)_2$ per ogni t, m, n;
2. Uguaglianza per $(J_t \otimes_{S_t} k)_3$ per ogni $t \leq 3$ e per ogni m, n;
3. $(J_2 \otimes_{S_2} k)_4 = 0$ per ogni m, n;
4. L'intera congettura per $J_2 \otimes_{S_2} k$ con $m \leq 4$ e ogni n;
5. Risultati combinatorici sui predecessori delle partizioni.

In generale, purtroppo, l'unico upper bound per il grado delle equazioni che abbiamo viene dalla regolarità di Castelnuovo-Mumford di A_t, che riusciamo a calcolare per ogni t, m, n.

$$(J_t \otimes_{S_t} k)_d = 0 \qquad \forall \;\; d > m^2 + (t-2)m.$$

RELAZIONI FRA MINORI DI TAGLIA FISSATA

Alcune relazioni hanno una bella interpretazione determinantale: Queste si ottengono ordinando le basi di E ed F in modo compatibile con gli ordini delle basi di V e W. Ad esempio, se $t = 2$, ordinando la base di E come $e_1 \wedge e_2 > e_1 \wedge e_3 > e_2 \wedge e_3 > \dots$ e quella di F come $f_1 \wedge f_2 > f_1 \wedge f_3 > f_1 \wedge f_4 > \dots$, il vettore di peso più alto della H-rappresentazione irriducibile $\bigwedge^3 E \otimes \bigwedge^3 F^*$ è:

$$\det \begin{pmatrix} (e_1 \wedge e_2) \otimes (f_1^* \wedge f_2^*) & (e_1 \wedge e_2) \otimes (f_1^* \wedge f_3^*) & (e_1 \wedge e_2) \otimes (f_1^* \wedge f_4^*) \\ (e_1 \wedge e_3) \otimes (f_1^* \wedge f_2^*) & (e_1 \wedge e_3) \otimes (f_1^* \wedge f_3^*) & (e_1 \wedge e_3) \otimes (f_1^* \wedge f_4^*) \\ (e_2 \wedge e_3) \otimes (f_1^* \wedge f_2^*) & (e_2 \wedge e_3) \otimes (f_1^* \wedge f_3^*) & (e_2 \wedge e_3) \otimes (f_1^* \wedge f_4^*) \end{pmatrix}$$

che è un vettore di peso massimale anche nella G-rappresentazione $\bigwedge^3 \bigwedge^t V \otimes \bigwedge^3 \bigwedge^t W^*$, ed è la cubica minimale descritta all'inizio.