Appunti di lavoro su limiti, differenziali, derivate, integrali. Un punto di vista matematico

Nella scuola superiore il concetto di limite interviene in molte occasioni prima dell'introduzione formale all'interno del calcolo infinitesimale. Vediamone alcune:

1) La tangente ad una curva come limite delle rette secanti. Ci sono due esempi particolarmente significativi: la circonferenza e la parabola, che meritano un'attenzione particolare. Spesso con la geometria analitica la condizione di tangenza viene trovata semplicemente annullando il discriminante di una equazione di secondo grado. Esempi: trovare k tale che la retta del fascio $y = 3x + k$ è tangente alla parabola di equazione $y = ax^2$.

Nel caso di $y = x^3$ oppure $y = x^n$ si può pensare alla tangente come la retta che ha una intersezione di molteplicitá superiore. Il concetto di differenziale come incremento infinitesimo in questi casi è maneggiabile.

Notiamo che quando un corpo si muove lungo una curva la tangente dá la direzione del vettore velocitá in quel punto. La tangente della parabola mostra quindi la direzione della velocitá di un grave soggetto alla gravitá.

2) la lunghezza della circonferenza come limite delle lunghezze dei poligoni regolari inscritti (e circoscritti)

3) La velocitá istantanea di un corpo (in modulo), ed in seconda battuta l'accelerazione. Qui abbiamo $v = \frac{ds}{dt} \simeq \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Sul significato di $\simeq$ si è discusso all'infinito, e si discuite tuttora. La matematica ha impiegato 150 anni a formalizzare il concetto con il linguaggio ϵ-δ. Nel 1960 l'analisi standard di Robinson ha aperto un nuovo capitolo, permettendo di trattare gli infinitesimi come oggetti matematici definiti rigorosamente. La materia á peró troppo avanzata per essere trattata nella scuola.

4) La densitá di un corpo.

5) i numeri razionali come numeri decimali illimitati periodici, esempio $10/3 = 3,33333.....$

6) i numeri reali come numeri decimali illimitati

$$a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k 10^{-k}$$

Osservazione Un limite notevole che esce dal qudro dei polinomi e che è fondamentale per la fisica (leggi del pendolo, ecc...) è

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Come si dimostra questo limite? Che importanza ha per l'approssimazione? Come si deducono limiti analoghi come

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$$

Esercizio

La curva studiata in questo esercizio risale alla Grecia classica. Si trova citata come trisettrice di Ippia o anche come quadratrice di Dinostrato, in relazione a due dei problemi classici dell'antichitá (la trisezione dell'angolo e la quadratura del cerchio). É particolarmente istruttiva perché estende una costruzione geometrica al caso limite dove la costruzione geometrica non ha significato.

Si consideri un quadrato OABC, con i vertici nominati in verso orario. Il segmento AB si muove in direzione perpendicolare a se stesso di moto uniforme fino a giungere sul lato opposto OC. Contemporaneamente il raggio OA ruota in verso orario di moto uniforme attorno al punto O, in modo che l'estremo A del raggio giunge su C nello stesso istante in cui AB giunge su OC.

La curva é descritta dal punto P intersezione del raggio con il segmento. Questa intersezione è quindi inizialmente in A.

a) Si chiede il limite della curva sul segmento OC. Il valore trovato dovrebbe spiegare il nome quadratrice che venne coniato da Dinostrato. Perchè ?

b) Osserviamo che un angolo AOM (interno a AOC) puó essere trisecato con il seguente algoritmo. OM incontra la nostra curva in Q. Sia R l'intersezione tra la parallela a OC passante per Q e il segmento OA. Dividiamo RA in tre parti. Allora..... Come si completa questo algoritmo? Perché ? Si puó dividere un angolo in n parti uguali con un metodo simile?

c) Si puó estendere la curva in altre regioni del piano? Che forma ha ?

d) Si può presentare questo esercizio all'ultimo anno di un Tecnico o di uno Scientifico? Che modifiche converrebbe apportare?