A

Nome: Corso di laurea: Indicare se 6 o 12 crediti:

Scritto di Matematica per cdl in Alimentari e Viticoltura ed Enologia
Prova scritta (12 crediti) del 10 Febbraio 2010

1) (4 punti) Una grandezza P dipende da una grandezza Q in modo lineare. E'noto che quando $Q = 1$ si ha $P = -3$ e che quando $Q = 6$ si ha $P = 5$.

(1) scrivere esplicitamente P in funzione di Q;
(2) dire per quale valore di Q si ha $P = 15$.

2) (6 punti) Sia $f(x) = (2x + 12)e^{1/x}$

(1) Studiare la crescenza e la decrescenza di f quando x varia nell'intervallo $[1, 4]$.
(2) Trovare i punti di massimo e di minimo assoluto di f in $[1, 4]$.

3) Sia $f(x) := (x - 3)^2 + 2\ln(x^2)$. La funzione ha come dominio $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ e inoltre $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

(1) (3 punti) dire dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;
(2) (2 punti) studiare la convessità di f;
(3) (2.5 punti) disegnare il grafico di f tenendo conto di tutte le informazioni precedenti.

(Nota: è molto difficile studiare dove f si annulla e il suo segno, e quindi disegnate il grafico facendo a meno di queste informazioni.)

4) (4 punti) In un certo istante la lunghezza di un rettangolo è 16 m e la larghezza è 12 m. La larghezza sta diminuendo di 3 m/s. Quanto rapidamente sta cambiando la lunghezza se l'area del rettangolo rimane costante?

5) (5 punti) Scrivere l'integrale che rappresenta l'area in figura 1. Poichè non è facile trovare le primitive necessarie per il calcolo esatto, calcolare un valore approssimato dell'area approssimando l'integrale con il metodo dei punti medi con $n = 5$.

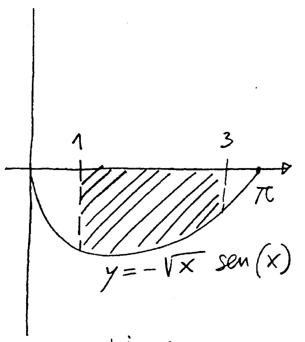


FiG 1

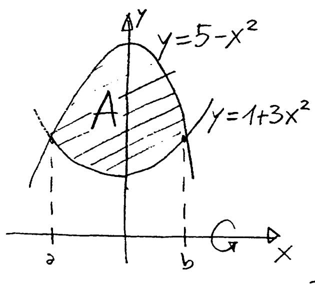


FiG2

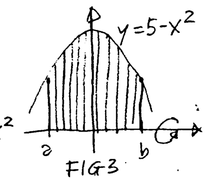


FIG3

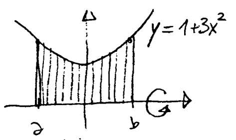


FIG4

6) (6,5 punti) Sia A l'insieme piano limitato dalle due parabole e disegnato in figura 2. Calcolare il volume del solido che si ottiene ruotando l'insieme A intorno all'asse x di un giro completo (assomiglia ad una ciambella con buco).

(Suggerimento: iniziare calcolando a e b; il volume richiesto è la differenza tra il volume del solido che si ottiene ruotando l'insieme in figura 3 intorno all'asse x e il volume del solido che si ottiene ruotando l'insieme in figura 4 intorno all'asse x).

Prova scritta (6 crediti)

Risolvere gli esercizi 1 (5 punti), 2 (7 punti), 3 (8 punti), 5 (7 punti). Sostituire l'esercizio 6 con il seguente:

6') (6 punti) Calcolare il valore esatto dell'integrale $\int_1^3 \frac{\sqrt{x}+1}{x} + \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

B

Nome: Corso di laurea: Indicare se 6 o 12 crediti:

Scritto di Matematica per cdl in Alimentari e Viticoltura ed Enologia
Prova scritta (12 crediti) del 10 Febbraio 2010

1) (4 punti) Una grandezza S dipende da una grandezza T in modo lineare. E'noto che quando $T = 1$ si ha $S = 7$ e che quando $T = 6$ si ha $S = 5$.

(1) scrivere esplicitamente S in funzione di T;
(2) dire per quale valore di T si ha $S = 2$.

2) (6 punti) Sia $f(x) = (2x + 4)e^{1/x}$

(1) Studiare la crescenza e la decrescenza di f quando x varia nell'intervallo $[1, 3]$.
(2) Trovare i punti di massimo e di minimo assoluto di f in $[1, 3]$.

3) Sia $f(x) = \dfrac{(x+5)^2}{2} + \ln(x^4)$. La funzione ha come dominio $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ e inoltre $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

(1) (3 punti) dire dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;
(2) (2 punti) studiare la convessità di f;
(3) (2.5 punti) disegnare il grafico di f tenendo conto di tutte le informazioni precedenti.

(Nota: è molto difficile studiare dove f si annulla e il suo segno, e quindi disegnate il grafico facendo a meno di queste informazioni.)

4) (4 punti) In un certo istante la lunghezza di un rettangolo è 6 m e la larghezza è 15 m. La larghezza sta aumentando di 5 m/s. Quanto rapidamente sta cambiando il perimetro se l'area del rettangolo rimane costante?

5) (5 punti) Scrivere l'integrale che rappresenta l'area in figura 1. Poichè non è facile trovare le primitive necessarie per il calcolo esatto, calcolare un valore approssimato dell'area approssimando l'integrale con il metodo dei punti medi con $n = 5$.

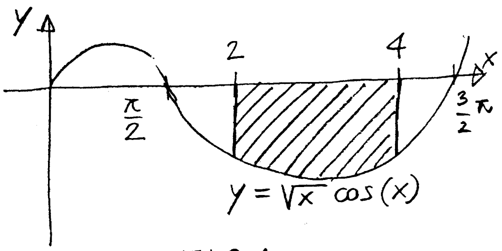


FIG 1

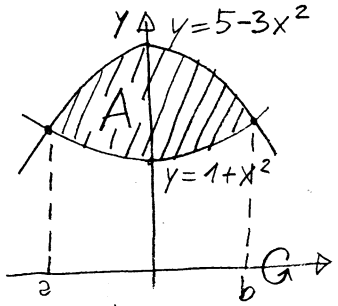


FIG 2

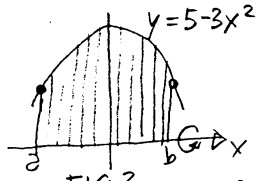


FIG 3

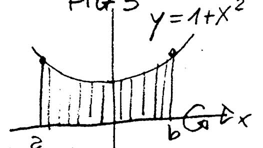


FIG 4

6) (6,5 punti) Sia A l'insieme piano limitato dalle due parabole e disegnato in figura 2. Calcolare il volume del solido che si ottiene ruotando l'insieme A intorno all'asse x di un giro completo (assomiglia ad una ciambellà con buco).

(Suggerimento: iniziare calcolando a e b; il volume richiesto è la differenza tra il volume del solido che si ottiene ruotando l'insieme in figura 3 intorno all'asse x e il volume del solido che si ottiene ruotando l'insieme in figura 4 intorno all'asse x).

Prova scritta (6 crediti)

Risolvere gli esercizi 1 (5 punti), 2 (7 punti), 3 (8 punti), 5 (7 punti). Sostituire l'esercizio 6 con il seguente:

6') (6 punti) Calcolare il valore esatto dell'integrale $\int_1^3 \frac{\sqrt{x}+1}{x} + \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

C

Nome: Corso di laurea: Indicare se 6 o 12 crediti:

Scritto di Matematica per cdl in Alimentari e Viticoltura ed Enologia
Prova scritta (12 crediti) del 10 Febbraio 2010

1) (4 punti) Una grandezza C dipende da una grandezza D in modo lineare. E'noto che quando $D = -1$ si ha $C = 3$ e che quando $D = 6$ si ha $C = -5$.

(1) scrivere esplicitamente C in funzione di D;
(2) dire per quale valore di D si ha $C = -10$.

2) (6 punti) Sia $f(x) = \left(\frac{1}{x} + 2\right) e^{x/6}$

(1) Studiare la crescenza e la decrescenza di f quando x varia nell'intervallo $[1, 4]$.
(2) Trovare i punti di massimo e di minimo assoluto di f in $[1, 4]$.

3) Sia $f(x) := -\frac{(x-6)^2}{2} - \ln(x^6)$. La funzione ha come dominio $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ e inoltre $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

(1) (3 punti) dire dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;
(2) (2 punti) studiare la convessità di f;
(3) (2.5 punti) disegnare il grafico di f tenendo conto di tutte le informazioni precedenti.

(Nota: è molto difficile studiare dove f si annulla e il suo segno, e quindi disegnate il grafico facendo a meno di queste informazioni.)

4) (4 punti) In un certo istante la lunghezza di un rettangolo è 16 m e la larghezza è 12 m. La larghezza sta aumentando di 3 m/s. Quanto rapidamente sta cambiando l'area se il perimetro del rettangolo rimane costante?

5) (5 punti) Scrivere l'integrale che rappresenta l'area in figura 1. Poichè non è facile trovare le primitive necessarie per il calcolo esatto, calcolare un valore approssimato dell'area approssimando l'integrale con il metodo dei punti medi con $n = 5$.

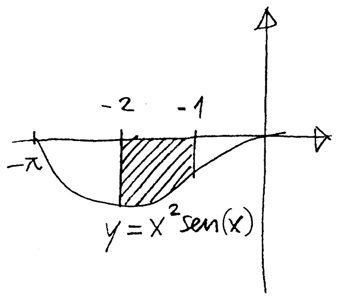


FIG 1

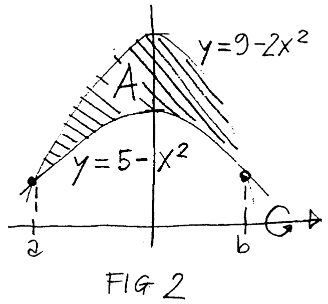


FIG 2

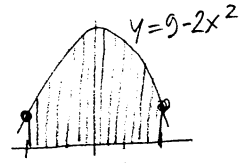


FIG 3

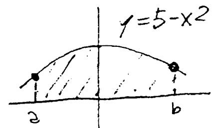


FIG 4

6) (6,5 punti) Sia A l'insieme piano limitato dalle due parabole e disegnato in figura 2. Calcolare il volume del solido che si ottiene ruotando l'insieme A intorno all'asse x di un giro completo (assomiglia ad una ciambella con buco).

(Suggerimento: iniziare calcolando a e b; il volume richiesto è la differenza tra il volume del solido che si ottiene ruotando l'insieme in figura 3 intorno all'asse x e il volume del solido che si ottiene ruotando l'insieme in frgura 4 intorno all'asse x).

Prova scritta (6 crediti)

Risolvere gli esercizi 1 (5 punti), 2 (7 punti), 3 (8 punti), 5 (7 punti). Sostituire l'esercizio 6 con il seguenti:

6') (6 punti) Calcolare il valore esatto dell'integrale $\int_1^3 \frac{\sqrt{x}+1}{x} + \frac{1}{1+x^2}\, dx$.

Esercizio 1 (A)

P è funzione lineare di Q e sappiamo che

P	Q
-3	1
5	6

$P = mQ + q$

$$m = \frac{P_2 - P_1}{Q_2 - Q_1} = \frac{5-(-3)}{6-1} = \frac{8}{5}$$

Per scegliere q imponiamo che quando $Q=1$ sia $P=-3$, cioè $-3 = \frac{8}{5}\cdot 1 + q$. Si ottiene $q = -3 - \frac{8}{5} = -\frac{23}{5}$

Quindi $P = \frac{8}{5}Q - \frac{23}{5}$.

Se vogliamo $P=15$ come deve essere Q?

$$15 = \frac{8}{5}Q - \frac{23}{5} \rightarrow Q = \left(15 + \frac{23}{5}\right)\cdot\frac{5}{8} = \frac{75+23}{8} = \frac{49}{4}$$

(B) con metodo simile si ottiene

$$S = -\frac{2}{5}T + \frac{37}{5}$$

Se vogliamo $S=2$ deve essere $T = \frac{27}{2}$

(C) Con metodo simile si ottiene

$$C = -\frac{8}{7}D + \frac{13}{7}$$

Se vogliamo $C=-10$ deve essere $D = \frac{83}{8}$

Esercizio 2

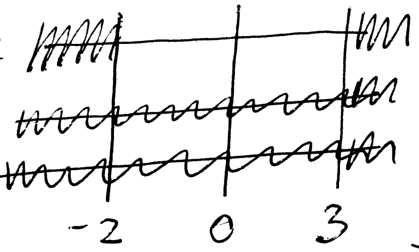
(A) Calcoliamo $f' = 2\,e^{\frac{1}{x}} + (2x+12)\,e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$

$$= \left(\frac{2x^2-2x-12}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}}$$

segno di $2x^2-2x-12$

segno di x^2

" " $e^{\frac{1}{x}}$



Quindi nell'intervallo $[1,4]$ la funzione è decrescente se $x<3$ ed è crescente se $x>3$.

Allora $x=3$ è il punto di minimo assoluto.

Comunque, per esserne certi e per calcolare il punto di max assoluto, calcoliamo il valore di f nei punti candidati ad essere di min o max assoluto in $[1,4]$ cioè in $x=1$, $x=3$ e $x=4$

$f(1) = 14 \cdot e \approx 38{,}05$

$f(3) = 18\,e^{\frac{1}{3}} \approx 25.12$

$f(4) = 20\,e^{\frac{1}{4}} \approx 25.68$

Quindi il minimo assoluto è in $x=3$ e il max assoluto è in $x=1$

(B) L'esercizio ed i calcoli sono simili. Qui $f' = \left(\frac{2x^2-2x-4}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}}$ e nell'intervallo $[1,3]$ la funzione è decrescente se $x<2$ e crescente se $x>2$.

$f(1) = 6\,e \approx 16{,}30$

$f(2) = 8\,e^{\frac{1}{2}} \approx 13.18$

$f(3) = 10\,e^{\frac{1}{3}} \approx 13{,}95$

Quindi il min assoluto in $[1,3]$ è $x=2$, mentre il max assoluto è $x=1$

(C) In questo caso $f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{x}{6}} + \left(\frac{1}{x}+2\right) e^{\frac{x}{6}} \cdot \frac{1}{6} = e^{\frac{x}{6}}\left(\frac{2x^2+x-6}{6x^2}\right)$

~~Nell'inter~~ Studiando il segno di f' si vede che nell'intervallo $[1,4]$ la funzione è decrescente per $x<\frac{3}{2}$ ed è crescente se $x>3/2$. Inoltre calcolo

$f(1) = 3\,e^{\frac{1}{6}} \approx 3.54$

$f(3/2) = \frac{8}{3}\,e^{\frac{3}{12}} \approx 3.42$

$f(4) = \frac{9}{4}\,e^{\frac{2}{3}} \approx 4.38$

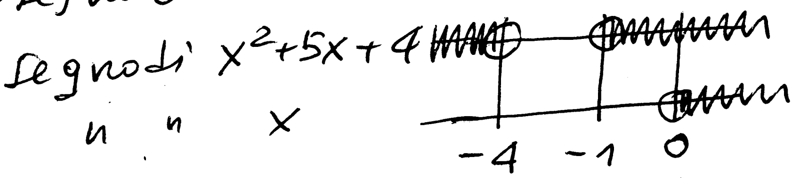
Quindi il min assoluto in $[1,4]$ è in $x=\frac{3}{2}$, mentre il max assoluto è in $x=4$

Esercizio 3

(B) Calcoliamo f'. Nota che $\ln(x^4)$ è una funzione composta e la sua derivata è $\frac{1}{x^4} \cdot 4x^3 = \frac{4}{x}$. Allora

$$f'(x) = \frac{2(x+5)}{2} + \frac{4}{x} = x+5+\frac{4}{x} = \frac{x^2+5x+4}{x}$$

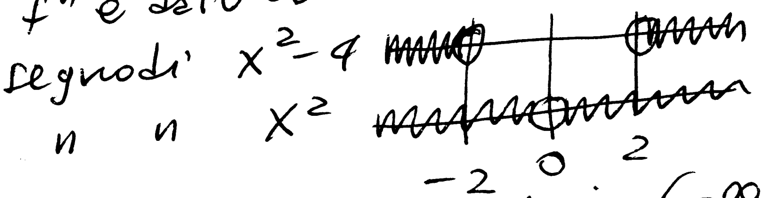
Il suo segno è dato da



Quindi f cresce in $[-4,-1]$ e in $(0,+\infty)$, decresce altrove.
I punti critici sono $x=-4$ e $x=-1$

Calcoliamo $f'' = \frac{(2x+5)x-(x^2+5x+4)}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2}$

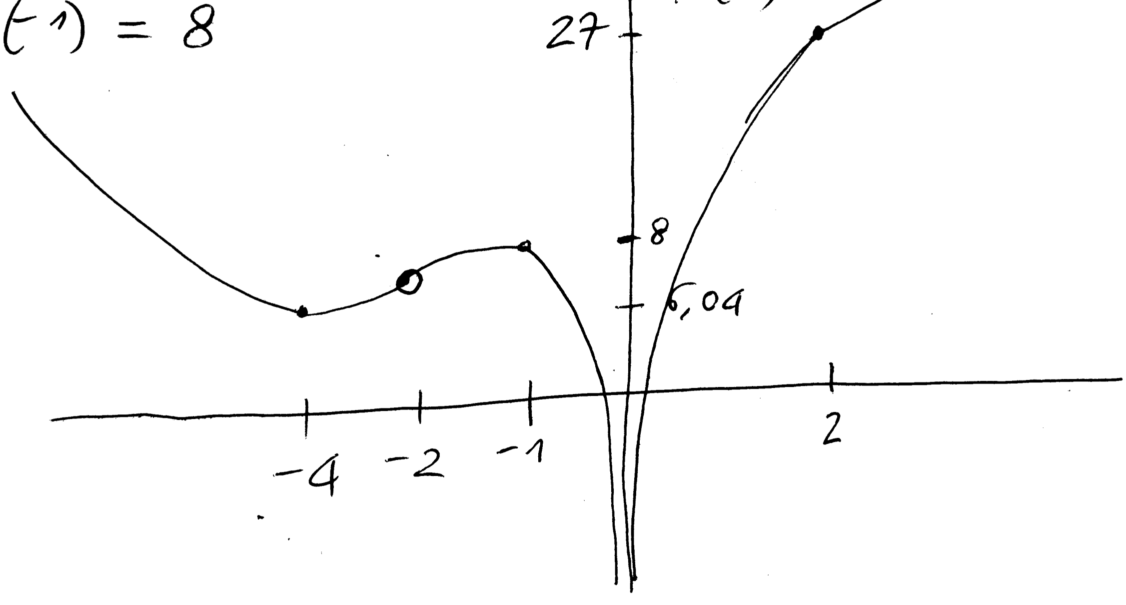
Il segno di f'' è dato da



Allora f è concava verso l'alto in $(-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$ e concava verso il basso altrove. I valori di x in cui f cambia concavità (cioè i punti di flesso) sono $x=2$ e $x=-2$.
Per disegnare il grafico calcoliamo il valore della funzione nei punti critici e nei punti di flesso

$f(-2) = 7,27$
$f(2) = 27$

$f(-4) = 6,09$
$f(-1) = 8$



Ⓐ L'esercizio è simile. Si calcola

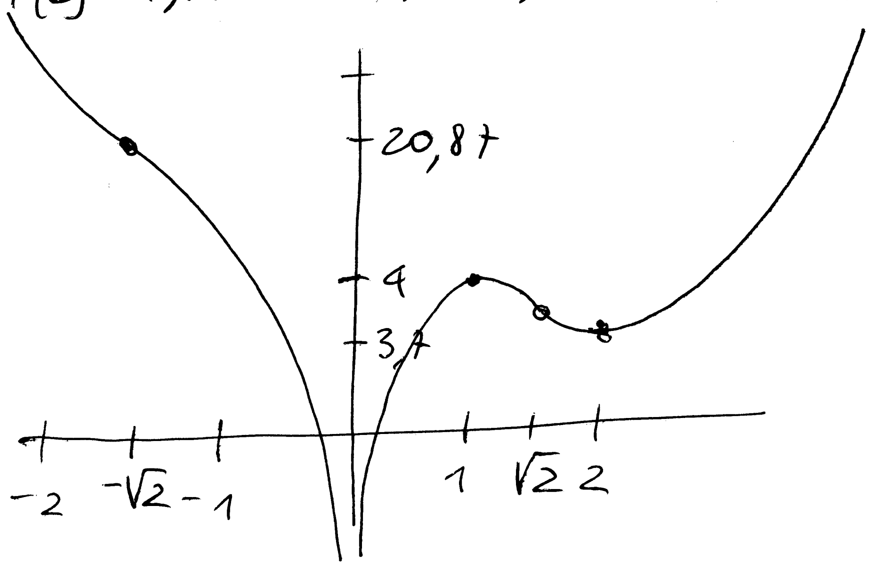
$f' = \frac{2x^2 - 6x + 4}{x}$. I punti critici sono $x = 1$ e $x = 2$

f cresce in $(0,1) \cup (2, +\infty)$, decresce altrove

$f'' = \frac{2(x^2-2)}{x^2}$ I punti di flesso sono $x = \pm\sqrt{2}$, f è

concava verso l'alto in $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$, verso il basso altrove

$f(1) = 4$ $f(2) = 3{,}77$ $f(\sqrt{2}) = 3{,}9$ $f(-\sqrt{2}) = 20{,}87$



Ⓒ Si ha $f'(x) = \frac{-x^2+6x+6}{x}$. $f' = 0$ se $x = 3 \pm \sqrt{3}$,

f è crescente se $x \in (-\infty, 0) \cup (3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$

$f'' = \frac{6-x^2}{x^2}$. Si annulla in $\pm\sqrt{6}$, f è concava verso l'alto

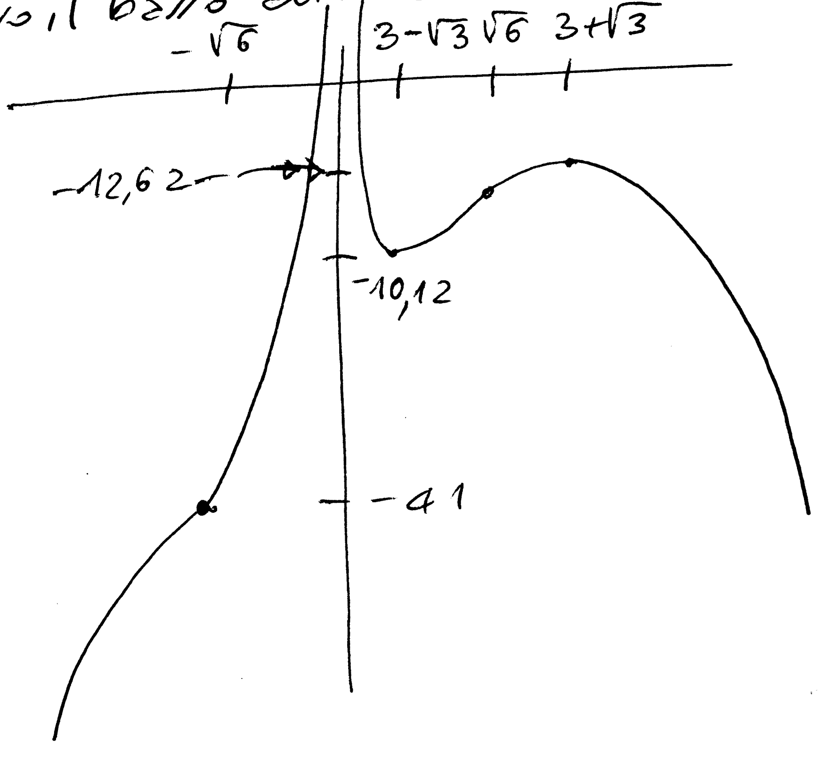
in $(-\sqrt{6}, 0) \cup (0, \sqrt{6})$ e verso il basso altrove

$f(3-\sqrt{3}) = -10{,}12$

$f(3+\sqrt{3}) = -12{,}62$

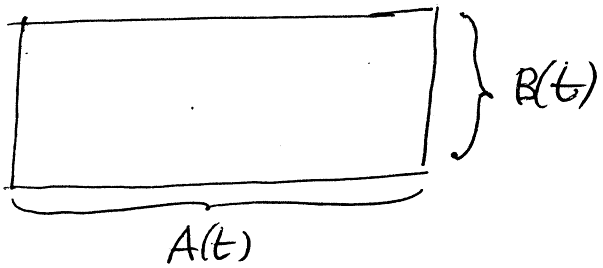
$f(\sqrt{6}) = -11{,}6$

$f(-\sqrt{6}) = -41$



Esercizio 4

(A) chiamiamo $A(t)$ la larghezza del rettangolo e $B(t)$ la sua lunghezza



Sappiamo che in un certo istante, che chiamo t_0, la larghezza è 12 m, e la lunghezza è 16.

Cioè $A(t_0) = 12$, $B(t_0) = 16$

Inoltre sappiamo che $\frac{dA}{dt} = -3$ m/s

Sappiamo anche che l'area è costante, quindi Area $= A(t) \cdot B(t) = 16 \times 12 = 192$. Questo ci dice anche che $B(t) = \frac{192}{A(t)}$

Allora $\frac{dB}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{192}{A(t)}\right) = -\frac{192}{(A(t))^2} \cdot \frac{dA}{dt}$.

Questa formula ~~quand~~ al tempo t_0 diventa

$$\frac{dB}{dt}(t_0) = -\frac{192}{(12)^2} \cdot (-3)$$

che da la risposta cercata: B cresce nell'istante t_0 con una velocità di $\frac{3 \cdot 192}{144}$ m/s

(B) ~~chiam~~ Diamo ad $A(t)$, $B(t)$ e t_0 lo stesso significato dell'esercizio (A). L'esercizio ci dice che

$A(t_0) = 15$, $B(t_0) = 6$ $\frac{dA}{dt}(t) = 5$

Anche in questo caso l'esercizio dice che Area $=$ costante $= A(t_0) \cdot B(t_0) = 6 \times 15 = 90$.

Da questa formula si ottiene $B(t) = \frac{90}{A(t)}$.

Il perimetro è uguale a $2A(t) + 2B(t)$, cioè

$(*)$ $\quad$ Perimetro $(t) = 2A(t) + \frac{180}{A(t)}$.

Derivando la formula $(*)$ si ottiene

$$\frac{d}{dt} \text{Perimetro}(t) = 2 \cdot \frac{dA}{dt}(t) - \frac{180}{(A(t))^2} \frac{dA}{dt}(t).$$

Quando il tempo è to questa formula diventa

$$\frac{d}{dt} \text{Perimetro}(t_0) = 2 \cdot 5 - \frac{180}{(15)^2} \cdot 5 = 6$$

Quindi il perimetro in to cresce ad una velocità di 6 m/s

Ⓒ Diamo ad $A(t)$, $B(t)$ e to lo stesso significato dell'esercizio Ⓐ e Ⓑ. L'esercizio dice che

$A(t_0) = 12$, $B(t_0) = 16$ $\frac{dA}{dt}(t) = 3$

L'esercizio dice anche che il perimetro è costante, e quindi è uguale a quello nell'istante to, cioè a 56 m

Allora

$*$ $\text{Perimetro} = 56 = 2A(t) + 2B(t)$

Da questa formula otteniamo $2B(t) = 56 - 2A(t)$

cioè $B(t) = 28 - A(t)$.

Quindi $\text{Area}(t) = A(t) \cdot B(t) = A(t)(28 - A(t))$

$= 28A(t) - (A(t))^2$

Derivando otteniamo

$$\frac{d}{dt} \text{Area}(t) = 28 \cdot \frac{dA}{dt}(t) - 2A(t) \cdot \frac{dA}{dt}(t)$$

Nell'istante to tale formula diventa

$$\frac{d}{dt} \text{Area}(t_0) = 28 \cdot 3 - 2 \cdot 12 \cdot 3 = 12$$

Quindi l'area cresce ad una velocità di 12 $\frac{m^2}{s}$

Esercizio 5 C

L'area è uguale a $\int_{-2}^{-1} 0 - x^2 sen(x)\, dx$

perché l'insieme è limitato da destra dalla retta $x=-1$, da sinistra dalla retta $x=-2$, dall'alto dall'asse x, che ha equazione $y=0$, e dal basso dalla curva $y = x^2 sen x$.

Dividiamo l'intervallo $[-2,-1]$ in 5 parti uguali e consideriamo i punti medi di ogni intervallino.

-1,9 -1,7 -1,5 -1,3 -1,1

-2 -1,8 -1,6 -1,4 -1,2 -1

La regola dei punti medi dice

$$Area = -\int_{-2}^{-1} x^2 sen(x)\, dx \approx -\Delta x \cdot \Big((-1,9)^2 sen(-1,9) + (-1,7)^2 sen(1,7) + (-1,5)^2 sen(1,5) + (-1,3)^2 sen(1,3) + (-1,1)^2 sen(1,1)\Big) = -0,2 \cdot \big(-3.41 - 2,86 - 2.24 - 1,62 - 1,07\big) = 2.24$$

Esercizio A : è simile

$$Area = \int_1^3 0 - (-\sqrt{x}\, sen(x))\, dx = \int_1^3 \sqrt{x}\, sen(x)\, dx$$

I punti sono

1.2 1,6 2 2,4 2,6

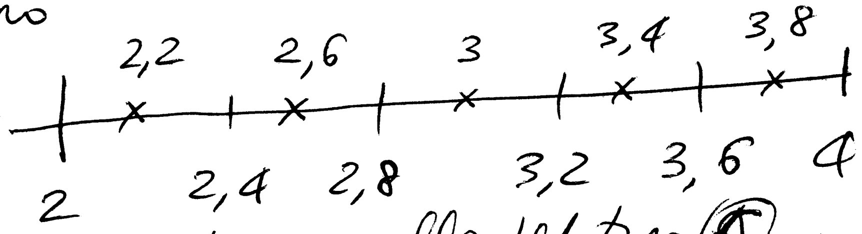
1 1,4 1,8 2,2 2,6 3

La formula è simile a quella del tipo C

Esercizio B

$$\text{Area} = \int_2^4 0-(\sqrt{x}\cos x)\,dx = -\int_2^4 \sqrt{x}\cos x\,dx$$

I punti sono



La formula è simile a quella del tipo C

Esercizio 6 A

Il volume del solido che si ottiene ruotando l'insieme disegnato nella figura 3 intorno all'asse x di un giro completo è

$$\pi\int_a^b (5-x^2)^2\,dx$$

il volume di quello della fig 4 è

$$\pi\int_a^b (1+3x^2)^2\,dx$$

Troviamo a e b. Sono le coordinate x dei punti intersezione delle due parabole.

$$\begin{cases} y=5-x^2 \\ y=1+3x^2 \end{cases} \to 5-x^2=1+3x^2 \to x=\pm 1$$

Per trovare le primitive necessarie a calcolare il primo integrale basta sviluppare il quadrato

$$\pi\int_{-1}^{1}(5-x^2)^2\,dx = \pi\int_{-1}^{1} 25+x^4-10x^2\,dx =$$

$$\pi\left[25x+\frac{x^5}{5}-\frac{10}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \pi\left[\left(25+\frac{1}{5}-\frac{10}{3}\right)-\left(-25-\frac{1}{5}+\frac{10}{3}\right)\right] =$$

$= \pi \cdot 43{,}7$

Analogamente

$$\pi \int_{-1}^{1} (1+3x^2)^2 dx = \pi \int_{-1}^{1} 1 + 9x^4 + 6x^2 \, dx =$$

$$\pi \left[x + \frac{9}{5} x^5 + 2x^3 \right]_{-1}^{1} = \pi \cdot 9{,}6$$

Allora il volume della "ciambella" è $\pi \cdot 43{,}7 - \pi \cdot 9{,}6$

Gli esercizi (B) e (C) si risolvono analogamente

Prova da 6 crediti Esercizio 6'

$$\int_1^3 \frac{\sqrt{x}+1}{x} + \frac{1}{1+x^2} \, dx =$$

si spezza la frazione come somma di 2 frazioni

$$\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{1+x^2} \, dx = \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{1+x^2} \, dx =$$

$$\left[\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \ln(x) + \arctan(x) \right]_1^3 = 2\sqrt{3} + \ln(3) +$$

$$+ \arctan(3) - \left(2\sqrt{1} + \ln(1) + \arctan(1) \right)$$

(attenzione ad esprimere il risultato dell'arctan in radianti e non in gradi)

$$= 3{,}46 + 1{,}09 + 1{,}24 - (2 + 0 + 0{,}78)$$