A

Nome: Corso di laurea:

Scritto di Matematica per cdl in Alimentari e Viticoltura ed Enologia
Prova scritta (12 crediti) dell'11 Febbraio 2009

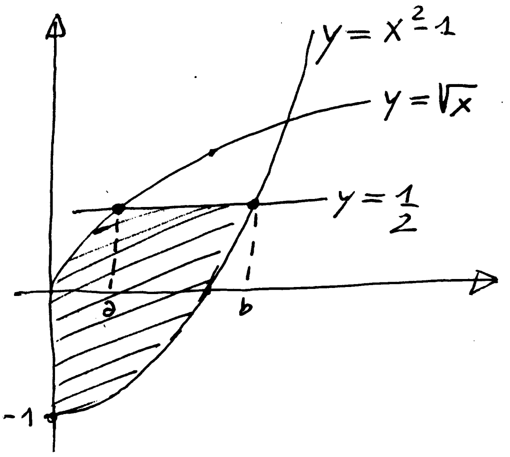
1) (6 punti) Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$$\frac{1}{1+\sqrt{3x+4}}, \quad \sin(\sqrt{x})(1+\cos(\sqrt{x})), \quad \frac{\ln x}{x^3+1}$$

2) (6 punti)
a) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = 3x + \frac{1}{x}$ nel punto $(1, f(1))$.
b) Determinare le coordinate del punto del grafico di f in cui la retta tangente al grafico è parallela alla retta $16y - 47x = 0$.

3) (9 punti) Disegnare il grafico della funzione $\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{9}{x}$. Indicare dominio, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti orizzontali e verticali, dove $f \geq 0$ e dove $f \leq 0$, dove f cresce e dove decresce, *dove f è concava verso l'alto e dove verso il basso.*
Indicare anche massimi e minimi locali e assoluti (se esistono) e l'immagine della funzione.

4) (6 punti) Calcolare l'area della regione disegnata in figura.



5) (6 punti) Calcolare il valore esatto dell'integrale

$$\int_0^{1.6} 6\sin x + (\sqrt{x} - x)^2\,dx$$

e poi confrontarlo con il suo valore approssimato calcolato tramite la regola di Simpson, con $n = 4$.

Prova scritta (6 crediti)

Risolvere gli esercizi 1, 4 e 5 precedenti (nel 5 usare il metodo dei punti medi). Sostituire gli esercizi 2 e 3 precedenti con i seguenti:

2') (6 punti) Determinare il dominio della funzione $x\sqrt{72 - x^2}$ e determinare il suo massimo e minimo assoluto nell'intervallo $[-7, 5]$.

3') (9 punti) identico al 3), ma senza lo studio della convessità, con la funzione sostituita da $\dfrac{x}{x^2-4x+5} - \dfrac{1}{2}$.

B

Nome: Corso di laurea:

Scritto di Matematica per cdl in Alimentari e Viticoltura ed Enologia
Prova scritta (12 crediti) dell'11 Febbraio 2009

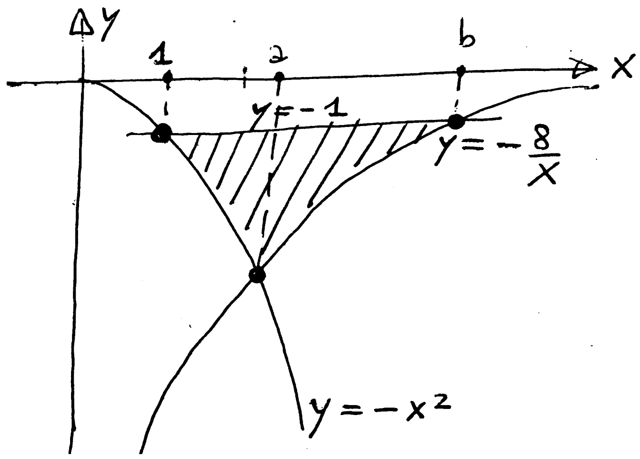
1) (6 punti) Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$$\frac{1}{5+e^{3x+4}}, \quad \sqrt{\sin x}(1+\sqrt{\cos x}), \quad \frac{\tan x}{x^3+1}$$

2) (6 punti)
a) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = 6x - \frac{1}{x}$ nel punto $(1, f(1))$.
b) Determinare le coordinate del punto del grafico di f in cui la retta tangente al grafico è parallela alla retta $9y - 55x = 0$.

3) (9 punti) Disegnare il grafico della funzione $\frac{(3x-1)^2}{x^2} - \frac{24}{5}$. Indicare dominio, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti orizzontali e verticali, dove $f \geq 0$ e dove $f \leq 0$, dove f cresce e dove decresce, *dove f è concava verso l'alto e dove verso il basso.*
Indicare anche massimi e minimi locali e assoluti (se esistono) e l'immagine della funzione.

4) (6 punti) Calcolare l'area della regione disegnata in figura.



5) (6 punti) Calcolare il valore esatto dell'integrale

$$\int_1^3 \frac{6}{x^2+1} + \frac{3x+6}{\sqrt{x}}\,dx$$

e poi confrontarlo con il suo valore approssimato calcolato tramite la regola dei punti medi, con $n = 5$.

Prova scritta (6 crediti)

Risolvere gli esercizi 1, 4 e 5 precedenti (nel 5 usare il metodo dei punti medi). Sostituire gli esercizi 2 e 3 precedenti con i seguenti:

2') (6 punti) Determinare il dominio della funzione $x\sqrt{72-x^2}$ e determinare il suo massimo e minimo assoluto nell'intervallo $[-7, 5]$.

3') (9 punti) identico al 3), ma senza lo studio della convessità, con la funzione sostituita da $\frac{x}{x^2-4x+5} - \frac{1}{2}$.

C

Nome: Corso di laurea:

Scritto di Matematica per cdl in Alimentari e Viticoltura ed Enologia
Prova scritta (12 crediti) dell'11 Febbraio 2009

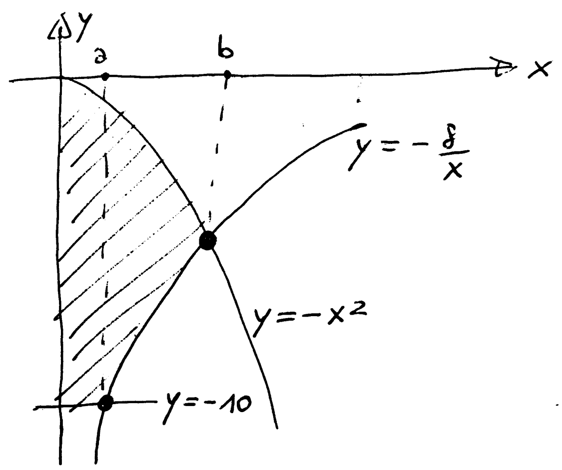
1) (6 punti) Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$$\frac{1}{4+\ln(3x+4)}, \quad \sin(e^x)(1+\cos(e^x)), \quad \frac{\sqrt{x}}{x^3+1}$$

2) (6 punti)
a) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = -3x - \frac{1}{x}$ nel punto $(1, f(1))$.
b) Determinare le coordinate del punto del grafico di f in cui la retta tangente al grafico è parallela alla retta $4y + 11x = 0$.

3) (9 punti) Disegnare il grafico della funzione $\frac{(3x-1)^2}{x^3}$. Indicare dominio, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti orizzontali e verticali, dove $f \geq 0$ e dove $f \leq 0$, dove f cresce e dove decresce, *dove f è concava verso l'alto e dove verso il basso.*
Indicare anche massimi e minimi locali e assoluti (se esistono) e l'immagine della funzione.

4) (6 punti) Calcolare l'area della regione disegnata in figura.



5) (6 punti) Calcolare il valore esatto dell'integrale

$$\int_0^{0.8} \frac{6}{\sqrt{1-x^2}} + (x+1)\sqrt{x}\, dx$$

e poi confrontarlo con il suo valore approssimato calcolato tramite la regola del trapezio, con $n = 4$.

Prova scritta (6 crediti)

Risolvere gli esercizi 1, 4 e 5 precedenti (nel 5 usare il metodo dei punti medi). Sostituire gli esercizi 2 e 3 precedenti con i seguenti:

2') (6 punti) Determinare il dominio della funzione $x\sqrt{72-x^2}$ e determinare il suo massimo e minimo assoluto nell'intervallo $[-7, 5]$.

3') (9 punti) identico al 3), ma senza lo studio della convessità, con la funzione sostituita da $\frac{x}{x^2-4x+5} - \frac{1}{2}$.

Esercizio 1

(A) $$\left(\frac{1}{1+\sqrt{3x+4}}\right)' = \frac{0 - 1\cdot\frac{1}{2\sqrt{3x+4}}\cdot 3}{\left(1+\sqrt{3x+4}\right)^2}$$

$$\left(\operatorname{sen}\sqrt{x}\left(1+\cos\sqrt{x}\right)\right)' = \left(\cos\sqrt{x}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\cos\sqrt{x}\right)+\operatorname{sen}\sqrt{x}\left(-\operatorname{sen}\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\cos^2\sqrt{x}-\operatorname{sen}^2\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{\ln x}{x^3+1}\right)' = \frac{\frac{1}{x}(x^3+1)-\ln x\cdot 3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{x^3+1-(\ln x)\,3x^3}{x\,(x^3+1)^2}$$

(B)
$$\left(\frac{1}{5+e^{3x+4}}\right)' = \frac{0-1\cdot e^{3x+4}\cdot 3}{\left(5+e^{3x+4}\right)^2}$$

$$\left(\sqrt{\operatorname{sen}x}\left(1+\sqrt{\cos x}\right)\right)' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen}x}}\left(1+\sqrt{\cos x}\right)+\sqrt{\operatorname{sen}x}\,\frac{(-\operatorname{sen}x)}{2\sqrt{\cos x}}$$

$$\left(\frac{\tan x}{x^3+1}\right)' = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}(x^3+1)-(\tan x)3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{(x^3+1)-3x^2\operatorname{sen}x\cdot\cos x}{\cos^2 x\,(x^3+1)^2}$$

(C) $$\left(\frac{1}{4+\ln(3x+4)}\right)' = \frac{0-\frac{1}{3x+4}\cdot 3}{\left(4+\ln(3x+4)\right)^2}$$

$$\left(\operatorname{sen}(e^x)\left(1+\cos(e^x)\right)\right)' = \cos(e^x)\cdot e^x\left(1+\cos e^x\right)+\operatorname{sen}(e^x)\cdot\left(-\operatorname{sen}(e^x)\cdot e^x\right)$$

$$= e^x\left(\cos^2(e^x)+\cos(e^x)-\operatorname{sen}^2(e^x)\right)$$

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{x^3+1}\right)' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^3+1)-\sqrt{x}\cdot 3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{x^3+1-6x^3}{2\sqrt{x}\,(x^3+1)^2} = \frac{1-5x^3}{2\sqrt{x}\,(x^3+1)^2}$$

Esercizio 2

(A) a) La retta tangente ha coeff. angolare uguale a $f'(1)$.
Dato che $f'(x) = 3 - \frac{1}{x^2}$ ho che $f'(1) = 3-1 = 2$
Allora la retta tangente ha eq. $y = 2x + q$. Poiché essa passa per il punto $(1, f(1))$, cioè $(1, 4)$ si ha che $q = 2$
Quindi eq. retta tangente cercata $\Rightarrow$ $y = 2x + 2$

b) ~~Nel punto di x~~ l'ascissa del punto cercato ~~la~~ derivata deve essere uguale al coeff. angolare della retta $16y - 47x = 0$, cioè a $\frac{47}{16}$. Allora se x indica l'ascissa del punto cercato deve essere $f'(x) = \frac{47}{16}$. Risolvendo tale equazione, cioè
$3 - \frac{1}{x^2} = \frac{47}{16}$, si ottengono due valori di x, $x = 4$ e $x = -4$
Allora ci sono due punti con la proprietà cercata e essi sono $(4, f(4))$ e $-4, f(-4)$

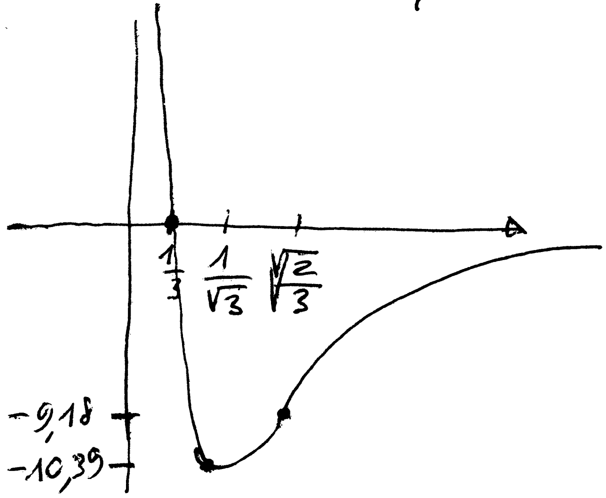
(B) Il procedimento è identico: in a) la retta ha eq. $y = 7x - 2$
in b) si ottengono i due punti $(3, f(3))$ e $(-3, f(-3))$

(C) a) retta $y = -2x - 2$
b) punti $(2, f(2))$, e $(-2, f(-2))$

Esercizio 2 (compito 6 crediti)
il dominio impone $72 - x^2 \geq 0$, cioè $x \in [-\sqrt{72}, +\sqrt{72}]$.
la derivata è $\sqrt{72-x^2} + x \frac{1}{2\sqrt{72-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{(72-x^2) - x^2}{\sqrt{72-x^2}} = \frac{72-2x^2}{\sqrt{72-x^2}}$

i punti del dominio in cui la derivata non è definita sono $\pm\sqrt{72}$.
I punti del dominio in cui la derivata si annulla sono ± 6
Il massimo e il minimo assoluti della funzione in $[-7, 5]$ si trovano in $x = -7$ o $x = 5$ o $x = -6$.
Poiché $f(-7) = -33{,}57$ $f(-6) = -36$ e $f(5) = 34{,}27$
Allora $x = -6$ è il punto di min assoluto, mentre $x = 5$ è quello di max assoluto

Ⓐ Poiché la funzione è dispari basta disegnarne il grafico nel semispazio $\{x \geq 0\}$, dato che il grafico nel semispazio $\{x \leq 0\}$ è ottenuto dall'altro per una riflessione rispetto al punto $(0,0)$.



dominio $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

asse x è asintoto per $x \to \pm\infty$

asse y è asintoto per $x \to 0^+$ e 0^-

$f \geq 0$ in $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right] \cup \left(0,\frac{1}{3}\right]$

f crescente in $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[-\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right)$

f concava verso l'alto in

$\left(-\infty,-\sqrt{\frac{2}{3}}\right] \cup \left(0,\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

$$f(x) = -\frac{3}{x^4}+\frac{9}{x^2}$$

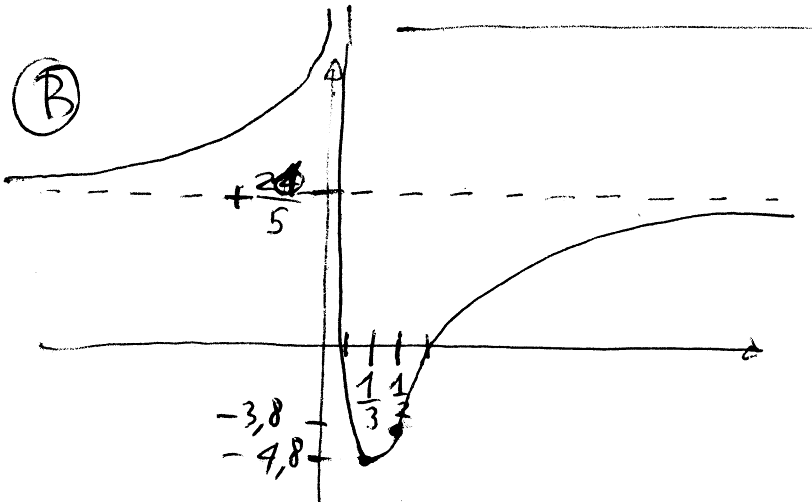
$$f''(x) = +\frac{12}{x^5}-\frac{18}{x^3}$$

punti critici $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, punti di flesso $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

Immagine $(-\infty,+\infty)$

$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ min locale $\quad x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ max locale

Ⓑ



Dominio $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

~~retta~~ $y = \frac{24}{5}$ è asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$

asse y asintoto per $x \to 0^+$ e 0^-

$f \geq 0$ in $\left(-\infty,\frac{15-\sqrt{120}}{21}\right] \cup$

$\left[\frac{15+\sqrt{120}}{21},+\infty\right)$

f crescente in $(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$

$x = \frac{1}{3}$ punto critico e min assoluto

$$f'(x) = \frac{9x-3}{x^3}$$

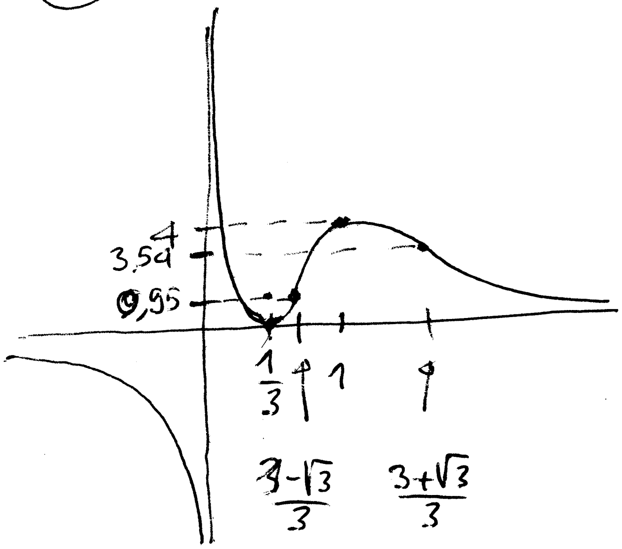
$$f''(x) = \frac{9-18x}{x^4}$$

f concava verso l'alto in $(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$

$x = \frac{1}{2}$ punto di flesso

Immagine $[-4{,}8;+\infty)$

(c)



$$f'(x) = \frac{3(-3x^2+4x-1)}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{6(3x^2-6x+2)}{x^5}$$

Dominio $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Asse y asintoto verticale per $x \to 0^+$ e 0^-

Asse x asintoto orizzont. per $x \to \pm\infty$

$f \geq 0$ in $(0, +\infty)$

f crescente in $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$

$x = \frac{1}{3}$ punto critico min locale

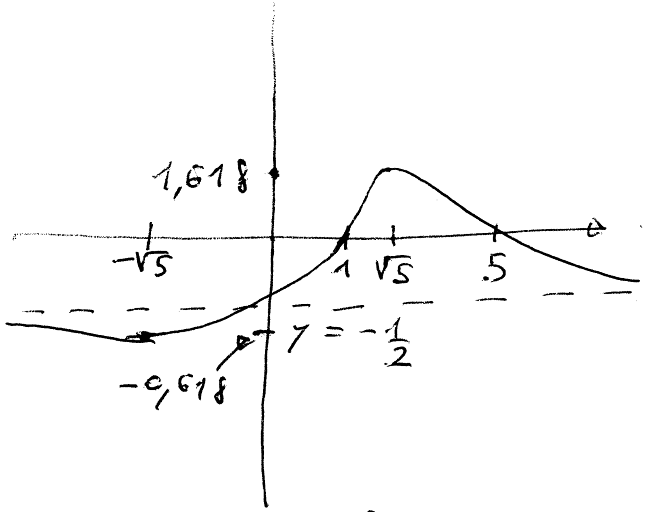
$x = 1$ punto critico max locale

f convessa verso l'alto in $\left(0, \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$ punti di flesso

Immagine $(-\infty, \infty)$

(6 crediti)



$$f'(x) = \frac{5-x^2}{(x^2-4x+5)^2}$$

Dominio $\mathbb{R}$

$y = -\frac{1}{2}$ asintoto per $x \to \pm\infty$

$f \geq 0$ in $[1, 5]$

f crescente in $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$

$x = -\sqrt{5}$ minimo assoluto

$x = \sqrt{5}$ massimo assoluto

Immagine $[-0{,}618 ; 1.618]$

Esercizio 4

(A) Coordinate dei punti   a: $\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$ $\sqrt{x}=\frac{1}{2}$ $x=\frac{1}{4}$

b: $\begin{cases} y=\frac{1}{2} \\ y=x^2-1 \end{cases}$ $x^2-1=\frac{1}{2}$ $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$

$$\text{Area} = \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x}-(x^2-1)\,dx + \int_{1/4}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \frac{1}{2}-(x^2-1)\,dx =$$

$$= \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\, x^{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^3}{3} + x\right]_0^{\frac{1}{4}} + \left[\frac{1}{2}x - \frac{x^3}{3} + x\right]_{1/4}^{\sqrt{3/2}} = \ldots\ldots$$

(B) Coordinate   a: $\begin{cases} y=-x^2 \\ y=-\frac{8}{x} \end{cases} \rightarrow x^2=\frac{8}{x} \rightarrow x^3=8 \rightarrow x=2$

b: $\begin{cases} y=-1 \\ y=-\frac{8}{x} \end{cases} \rightarrow \frac{8}{x}=1 \rightarrow x=8$

$$\text{Area} = \int_1^2 -1-(-x^2)\,dx + \int_2^8 -1-\left(-\frac{8}{x}\right)dx =$$

$$= -x+\frac{x^3}{3}\Big]_1^2 + \Big[-x+8\ln|x|\Big]_2^8 = \ldots\ldots$$

(C) Coordinate   a: $\begin{cases} y=-10 \\ y=-\frac{8}{x} \end{cases} \rightarrow 10=\frac{8}{x} \rightarrow x=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

b: $\begin{cases} y=-\frac{8}{x} \\ y=-x^2 \end{cases} \rightarrow \frac{8}{x}=x^2 \rightarrow x=2$

$$\text{Area} = \int_0^{\frac{4}{5}} -x^2-(-10)\,dx + \int_{\frac{4}{5}}^2 -x^2-\left(-\frac{8}{x}\right)dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3}+10x\right]_0^{\frac{4}{5}} + \left[-\frac{x^3}{3}+8\ln|x|\right]_{\frac{4}{5}}^2 = \ldots\ldots$$

Esercizio 5

(A)

a) $$\int_0^{1,6} 6\,\text{sen}\,x + x + x^2 - 2\underbrace{x\sqrt{x}}_{x^{\frac{3}{2}}}\,dx = \left[-6\cos x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{2}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}\right]_0^{1,6} =$$

$$\left(-6\cos(1,6) + 6\cos(0)\right) + \left(\frac{(1,6)^2}{2} - 0\right) + \left(\frac{(1,6)^3}{3} - 0\right) + \left(\frac{4}{5}(1,6)^{5/2} - 0\right) = \ldots$$

$$\approx -6\cdot(-0,29) + 6\cdot 1 + \ldots\ldots$$

b) 0 0,4 0,8 1,2 1,6

$$\text{integrale} \approx \frac{0,4}{3}\left(f(0) + 4f(0,4) + 2f(0,8) + 4f(1,2) + f(1,6)\right) =$$

$$= \frac{0,4}{3}\left((6\cdot 0 + 0) + 4\left(6\,\text{sen}(0,4) + (\sqrt{0,4} - 0,4)^2\right) + 2\left(6\,\text{sen}(0,8) + (\sqrt{0,8} - 0,8)^2\right) + \ldots\ldots\right)$$

(B)

a) $$\int_1^3 \frac{6}{x^2+1} + \underbrace{\frac{3x}{\sqrt{x}}}_{\sqrt{x}} + \frac{6}{\sqrt{x}}\,dx = \left[6\arctan(x) + 3\cdot\frac{2}{3}(x)^{3/2} + 6\cdot 2\sqrt{x}\right]_1^3 =$$

$$\left(6\arctan(3) - 6\arctan(1)\right) + \left(2\cdot 3^{3/2} - 2\cdot 1\right) + 12\sqrt{3} - 12\sqrt{1} \approx$$

$$= 6\cdot 1,24 - 6\cdot 0,78 + \ldots\ldots$$

b) 1,25 1,75 2,25 2,75

1 1,5 2 2,5 3

Nota: l'esercizio richiedeva $n = 5$. Qui, per sbaglio, l'ho risolto con $n = 4$

$$\text{Integrale} \approx 0,5\cdot\left(f(1,25) + f(1,75) + f(2,25) + f(2,75)\right) \approx$$

$$= 0,5\left(\left(\frac{6}{(1,25)^2+1} + \frac{3\cdot 1,25 + 6}{\sqrt{1,25}}\right) + \ldots\ldots\right)$$

(C)

a) $$\int_0^{0,8} \frac{6}{\sqrt{1-x^2}} + x\sqrt{x} + \sqrt{x}\,dx = \left[6\arcsen(x) + \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^{0,8} \approx$$

$$\approx (6\cdot 0,92 - 6\cdot 0) + \ldots\ldots$$

b) 0 0,2 0,4 0,6 0,8

$$\text{Integrale} \approx \frac{0,2}{2}\cdot\left(f(0) + 2f(0,2) + 2f(0,4) + 2f(0,6) + f(0,8)\right)$$

$$\approx \frac{0,2}{2}\left(\left(\frac{6}{\sqrt{1}} + 0 + 0\right) + 2\left[\frac{6}{\sqrt{1-(0,2)^2}} + 0,2\sqrt{0,2} + \sqrt{0,2}\right] + \ldots\ldots\right)$$