Nome e cognome:

Scritto di Matematica per cdl in Viticoltura ed Enologia
Prova scritta del 13 Febbraio 2017

Negli esercizi 2, 3, 4 e 5 vi é richiesto di indicare, oltre alle risposte, anche i passaggi principali svolti per arrivare a dare quelle risposte.

Domande brevi

1a) (1,5 punti) Calcolare la derivata di $\left(\frac{x+1}{e^x}\right)^{100}$ in $x=0$.

soluzione 0

$$f'(x) = 100 \cdot \left(\frac{x+1}{e^x}\right)^{99} \cdot \frac{1 \cdot e^x - (x+1)e^x}{e^{2x}}$$

$$f'(0) = 100 \cdot \left(\frac{1}{1}\right)^{99} \cdot \frac{1-1}{1} = 0$$

1b) (1,5 punti) Calcolare media e deviazione standard dei numeri $\{-2, 3, 7, 0\}$.

soluzione MEDIA = 2 , $\sigma = \sqrt{11} \simeq 3{,}4$

$$\text{MEDIA} = \frac{-2+3+7+0}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(-2-2)^2+(3-2)^2+(7-2)^2+(0-2)^2}{4}} = \sqrt{\frac{16+1+25+4}{4}}$$

$$= \sqrt{11{,}5} \simeq 3{,}4$$

1c) (1,5 punti) So che il massimo del valore assoluto della derivata quarta della funzione f nell'intervallo $[1,3]$ è 30. Quanto grande si deve prendere n per essere sicuri che il metodo di Simpson calcoli $\int_1^3 f(x)dx$ con una accuratezza di 0,0001?

soluzione

So che $|\text{Errore di approssimazione}| \leq \frac{K \cdot (3-1)^5}{180\, n^4} = \frac{30 \cdot 2^5}{180\, n^4} = \frac{2^5}{6\, n^4}$

Basta prendere n in modo che $\frac{2^5}{6\, n^4} < 0{,}0001$ cioè $n > \sqrt[4]{\frac{2^5 \cdot 10^4}{6}}$

cioè $n > 15{,}1$

1d) (1,5 punti) Dire se $\frac{x^2}{2}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}+e^x\right)$ è la primitiva di $x\left(\sqrt{x}+e^x\right)$

soluzione NO

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2}{2}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}+e^x\right)\right] =$$

$$= 2\frac{x}{2}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}+e^x\right) + \frac{x^2}{2}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{1/2}+e^x\right)$$

$$= x\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}+e^x\right) + \frac{x^2}{2}\left(\sqrt{x}+e^x\right) \neq x\left(\sqrt{x}+e^x\right)$$

(NB. $(f(x)\cdot g(x))' \neq f'(x)\cdot g'(x)$)

2) (7 punti) Considerate la funzione

$$f(x) = x \ln x - 3x.$$

a) (2 punti) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f in $(1, -3)$.
b) (2 punti) Esiste un punto del grafico di f in cui la tangente ha coefficiente angolare 6? Se esiste trovare quel punto. Altrimenti spiegare perché non c'è.
c) (3 punti) *(attenzione: domanda un po' diversa dalle solite)* Considera il pezzo del grafico fatta da tutti i punti che hanno coordinata x in $[1, 3]$ (è un arco di curva). In quale di questi punti il coefficiente angolare della retta tangente al grafico è minimo? Spiegare bene il perché.

risposta a a):	$y = -2x - 1$
risposta a b): esiste? perché?	Sì
risposta a b): se esiste scrivete le coordinate del punto	$x = e^8$
risposta a c):	$x = 1$

Svolgimento:

a) $f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 3 = \ln x - 2$

$m = f'(1) = \ln 1 - 2 = -2$

$r: y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y + 3 = -2(x-1)$

$\Rightarrow y = -2x + 2 - 3 \rightarrow r: y = -2x - 1$

b) $f'(x) = 6 \Rightarrow \ln x - 2 = 6 \Rightarrow \ln x = 8$

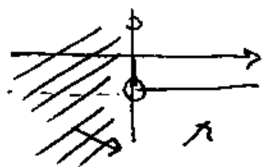
$\Rightarrow x = e^8$

c) Consideriamo la funzione coeff. angolare

$m(x) = f'(x) = \ln x - 2$

Per trovare il minimo di tale funzione si può studiare la sua derivata

$m'(x) = \frac{1}{x} \geq 0$



che è sempre crescente nel suo dominio $(0, +\infty)$

$\Rightarrow$ ~~assume~~ in $[1,3]$ assume valore minimo per $x = 1$

$\Rightarrow m(1) = -2$

(NB: si poteva osservare che $\ln x$ è una funzione crescente in $(0, +\infty)$ e quindi anche $\ln x - 2$ lo è, si può quindi concludere senza fare ulteriori derivate)

3) (8 punti) Sia $f(x) = 2 - \dfrac{4}{x} - \dfrac{6}{x^2}$.

Il dominio di f è $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ e inoltre $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ e $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$.

a) Dire dove f è negativa, dove è positiva e dove si annulla;
b) Scrivere la derivata prima di f e dire dove f cresce, dove decresce e dove f' è zero;
c) Scrivere la derivata seconda di f e dire dove f è concava verso l'alto;
d) Disegnare il grafico di f tenendo conto anche della concavità.

f è positiva in $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$ è negativa in $(-1,0)\cup(0,3)$ è zero in $x=-1$; $x=3$
derivata prima di f $\quad \dfrac{4(x+3)}{x^3}$
f cresce in $(-\infty;-3)\cup(0;+\infty)$ e decresce in $(-3,0)$
x in cui $f'=0$ e valore di f in essi $\quad x=-3$; $f(-3)=2,\bar{6}$
derivata seconda di f $\quad \dfrac{-4(2x+9)}{x^4}$
f è concava verso l'alto in $\left(-\infty; -\dfrac{9}{2}\right)$

Svolgimento e grafico:

(a) $f(x) = 2\dfrac{(x^2-2x-3)}{x^2} = 2\dfrac{(x-3)(x+1)}{x^2}$

N_1 $x-3\geq 0$, $x\geq 3$
N_2 $x+1\geq 0$, $x\geq -1$
D $x^2>0$, $\forall x\neq 0$

	-1		0		3	
N_1	$-$		$-$	$-$		$+$
N_2	$-$		$+$	$+$		$+$
D	$+$		$+$	$+$		$+$
	$+$		$-$	$-$		$+$

(b) $f'(x) = 2\left[\dfrac{x^{\cancel{2}}(2x-2) - 2\cancel{x}(x^2-2x-3)}{x^{\cancel{4}3}}\right] = 2\left[\dfrac{2x^{\cancel{2}} - 2x - 2\cancel{x}^2 + 4x + 6}{x^3}\right] = \dfrac{4(x+3)}{x^3}$

$\dfrac{4(x+3)}{x^3} \geq 0$ $\quad$ N $x+3\geq 0$, $x\geq -3$ $\quad$ D $x^3>0$, $x>0$

		-3		0	
N	$-$		$+$		$+$
D	$-$		$-$		$+$
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$f(-3) = \dfrac{2[(-3)^2 - 2(-3) - 3]}{(-3)^2} = \dfrac{8}{3} = 2,\bar{6}$

(c) $f''(x) = 4\left[\dfrac{1\cdot x^{\cancel{3}} - 3x^{\cancel{2}}(x+3)}{x^{\cancel{6}4}}\right] = 4\left[\dfrac{x-3x-9}{x^4}\right] = 4\left[\dfrac{-2x-9}{x^4}\right]$

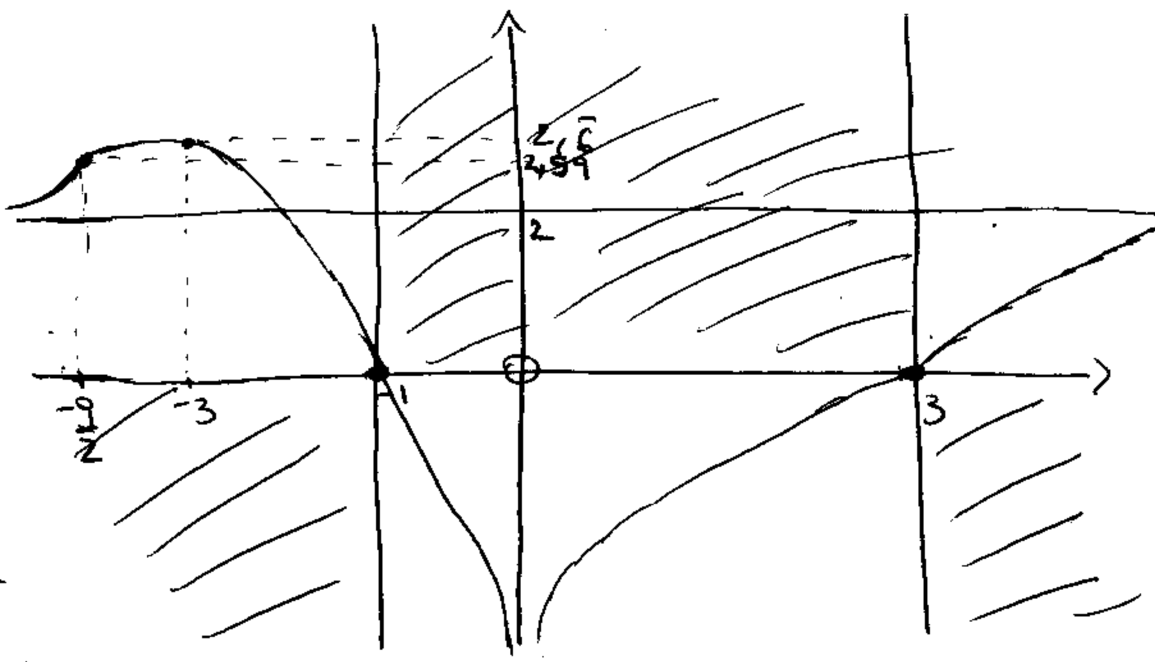
$4\left(\dfrac{-2x-9}{x^4}\right) \geq 0$

N $-2x-9\geq 0$

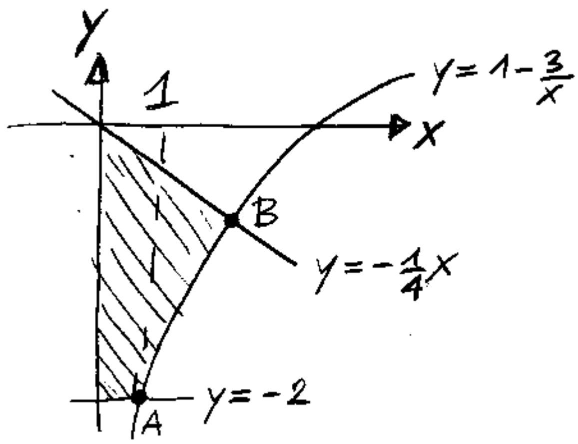
$x \leq -\dfrac{9}{2}$

D $x^4>0$ $\forall x\neq 0$

		$-9/2$		0	
N	$+$		$-$		$-$
D	$+$		$+$		$+$
$f''(x)$	$+$		$-$		$-$
	$\cup$		$\cap$		$\cap$



4) (6 punti) Calcolate l'area della regione tratteggiata in figura.



coordinate x dei punti A e B	$X_A = 1$ $\quad X_B = 2$
integrale/i per calcolare l'area	$\int_0^1 -\frac{x}{4}+2\,dx + \int_1^2 -\frac{x}{4}-1+\frac{3}{x}\,dx$
valore dell'area	$\frac{1}{2}+3\ln 2$

Svolgimento:

$$X_A : \begin{cases} y = 1-\frac{3}{x} \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow \quad 1-\frac{3}{x} = -2 \qquad 1+2 = \frac{3}{x} \qquad 3 = \frac{3}{x} \qquad x = 1$$

$$X_B = \begin{cases} y = 1-\frac{3}{x} \\ y = -\frac{1}{4}x \end{cases} \qquad 1-\frac{3}{x} = -\frac{1}{4}x \qquad \frac{4x-12}{4x} = \frac{-x^2}{4x} \qquad x^2+4x-12$$

$$x = \begin{cases} 2 \\ -6 \end{cases}$$ Poichè B ha coordinata x positiva scelgo 2

Spezzo in 2 parti verticalmente tramite la retta verticale per A

$$\text{Area} = \int_0^1 -\frac{x}{4}-(-2)\,dx + \int_1^2 -\frac{x}{4}-\left(1-\frac{3}{x}\right)dx = \int_0^1 2-\frac{x}{4}\,dx + \int_1^2 -\frac{x}{4}-1+\frac{3}{x}\,dx =$$

$$\left[2x-\frac{x^2}{8}\right]_0^1 + \left[-\frac{x^2}{8}-x+3\ln x\right]_1^2 = (2-0) + \cancel{\left(-\frac{1}{8}-0\right)} + \left(-\frac{4}{8}+\cancel{\frac{1}{8}}\right) + (-2+1) +$$

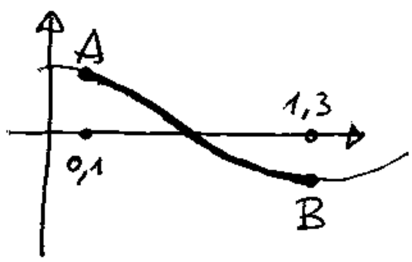
$$+3\ln 2 - 3\cancel{\ln 1}^{\,0} = 2-\frac{1}{2}-1+3\ln 2 = \frac{1}{2}+3\ln 2 \approx 2{,}5794$$

5) (6 punti) Considerate l'arco della curva $y = \cos(2x)$ compreso i due estremi $A = (0.1\ ,\ \cos(0.2))$ e $B = (1.3\ ,\ \cos(2.6))$.

a) Scrivete la lunghezza di tale arco tramite un opportuno integrale;
b) Chiamiamo I l'integrale del punto a). Calcolate un valore approssimato di I tramite il metodo di Simpson con $n = 4$ (attenzione all'uso dei gradi e dei radianti nel calcolo);

integrale I
valore approssimato di I con $n = 4$

Svolgimento:



$$\text{lunghezza} = \int_{0,1}^{1,3} \sqrt{1+(\text{derivata})^2}\,dx$$

$$= \int_{0,1}^{1,3} \sqrt{1+\left(-2\,\text{sen}(2x)\right)^2}\,dx$$

$$\Delta x = \frac{1,3-0,1}{4} = \frac{1,2}{4} = 0,3$$

0,1 0,4 0,7 1 1,3

x	$\sqrt{1+(2\,\text{sen}(2x))^2}$
0,1	1,076
0,4	1,7488
0,7	2,2101
1	2,0754
1,3	1,4363

$$\text{lunghezza} = \int_{0,1}^{1,3} \sqrt{}\,dx \approx$$

$$\approx \frac{\Delta x}{3}\left(f(0,1) + 4f(0,4) + 2f(0,7) + 4f(1) + f(1,3)\right) \approx$$

$$0,1\,(22,2293) = 2,22293$$

Nome e cognome:

Scritto di Matematica per cdl in Viticoltura ed Enologia
Prova scritta del 13 Febbraio 2017

Negli esercizi 2, 3, 4 e 5 vi é richiesto di indicare, oltre alle risposte, anche i passaggi principali svolti per arrivare a dare quelle risposte.

Domande brevi

1a) (1,5 punti) Calcolare la derivata di $\cos(x)\sqrt{e^x+1}$ in $x=0$.

soluzione $\sqrt{2}/4$

$$f'(x) = -\operatorname{sen}x \cdot \sqrt{e^x+1} + \cos x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{e^x+1}} \cdot e^x$$

$$f'(0) = 0 + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1$$

1b) (1.5 punti) Calcolare media e deviazione standard dei numeri $\{-3, 3, 11, 1\}$.

soluzione MEDIA -3 $\sigma = \sqrt{26} \simeq 5{,}1$

$$\text{MEDIA } E(X) = \frac{-3+3+11+1}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(-3-3)^2+(3-3)^2+(11-3)^2+(1-3)^2}{4}} = \sqrt{\frac{36+0+64+4}{4}}$$

$$= \sqrt{26} \simeq 5{,}1$$

1c) (1.5 punti) So che il massimo del valore assoluto della derivata quarta della funzione f nell'intervallo $[1, 1.5]$ è 20. Quanto grande si deve prendere n per essere sicuri che il metodo di Simpson calcoli $\int_1^{1.5} f(x)dx$ con una accuratezza di 0.0001?

soluzione

$$|\text{Errore}| \le \frac{K(b-a)^5}{180\, n^4} = \frac{20\,(0{,}5)^5}{180\, n^4}$$, Basta scegliere n in modo

che $\frac{20 \cdot (0{,}5)^5}{180\, n^4} < 0{,}0001$ cioè

$n > \sqrt[4]{\frac{(0{,}5)^5 \cdot 10000}{9}}$, cioè $n > 2{,}4$, cioè $n \geq 3$

1d) (1,5 punti) Dire se $\left(\frac{x^2}{2} + \ln x\right)^2$ è una primitiva di $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$

soluzione NO

$$\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{x^2}{2} + \ln x\right)^2\right] = 2\left(\frac{x^2}{2} + \ln x\right)^1 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) \neq \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$$

$$\left(\text{NB}: \left[(f(x))^n\right]' \neq \left(f'(x)\right)^n\right)$$

2) (7 punti) Considerate la funzione

$$f(x) = e^{3x-1} - 6x.$$

a) (2 punti) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f in $(1/3, -1)$.

b) (2 punti) Esiste un punto del grafico di f in cui la tangente ha coefficiente angolare -1? Se esiste trovare quel punto. Altrimenti spiegare perché non c'è.

c) (3 punti)*(attenzione: domanda un po' diversa dalle solite)* Considera il pezzo del grafico fatta da tutti i punti che hanno coordinata x in $[-1, 0]$ (è un arco di curva). In quale di questi punti il coefficiente angolare della retta tangente al grafico è minimo? Spiegare bene il perché.

risposta a a):	$y = -3x$
risposta a b): esiste? perché?	Sì. ~~per [illegible]~~
risposta a b): se esiste scrivete le coordinate del punto	$x = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{5}{3}\right)$
risposta a c):	per $x = -1$

Svolgimento:

a) $f'(x) = 3 \cdot e^{3x-1} - 6$

$m = f'(1/3) = 3 \cdot e^{1-1} - 6 = 3 - 6 = -3$

$r: \quad y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y + 1 = -3(x - 1/3)$

$y + \cancel{1} = -3x + \cancel{1} \Rightarrow r: y = -3x$

b) $f'(x) = -1 \Rightarrow 3e^{3x} - 6 = -1 \Rightarrow 3e^{3x} = 6 - 1$

$\Rightarrow e^{3x} = \frac{5}{3} \Rightarrow 3x = \ln \frac{5}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \ln \frac{5}{3}$

c) la funzione coef. angolare è data dalla derivata, quindi si pone $m(x) = f'(x) = 3(e^{3x-1} - 2)$ ~~per [illegible]~~

Per trovare il minimo ~~[illegible]~~ si può studiare la derivata di $m(x)$

$m(x)' = 3 \cdot 3e^{3x-1} = 9e^{3x-1}$

$\Rightarrow m'(x) > 0$, ovvero $m(x)$ è una funzione crescente

$\Rightarrow$ in $[-1, 0]$ il coeff. angolare è minimo in -1

$\Rightarrow m(-1) = 3 \cdot e^{-4} - 6$

(NB: si poteva anche osservare che, ~~[illegible]~~ essendo e^x una funzione crescente, $3e^{3x-1} - 6$ è ~~[illegible]~~ una " " , si può quindi concludere come sopra senza calcolare ulteriori derivate).

3) (8 punti) Sia $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^3}$.

Il dominio di f è $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ e inoltre $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. $\lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$.

a) Dire dove f è negativa, dove è positiva e dove si annulla;
b) Scrivere la derivata prima di f e dire dove f cresce, dove decresce e dove f' è zero;
c) Scrivere la derivata seconda di f e dire dove f è concava verso l'alto;
d) Disegnare il grafico di f tenendo conto anche della concavità.

f è positiva in $(0,+\infty)$	è negativa in $(-\infty,0)$	è zero in $x=1$
derivata prima di f $\dfrac{(x-1)(3-x)}{x^4}$		
f cresce in $(1;3)$	e decresce in $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(3,+\infty)$	
x in cui $f'=0$ e valore di f in essi $x=1$; $x=3$; $f(1)=0$; $f(3)=0{,}148$		
derivata seconda di f $\dfrac{2(x^2-6x+6)}{x^5}$		
f è concava verso l'alto in $(0;3-\sqrt3)\cup(3+\sqrt3;+\infty)$		

Svolgimento e grafico:

a) $\dfrac{(x-1)^2}{x^3} \geq 0$ N. $(x-1)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

D. $x^3 > 0 \quad x > 0$

		0	
N	+		+
D	−	∅	+
$f(x)$	−	∅	+

$f(x)=0 \iff \dfrac{(x-1)^2}{x^3}=0 \iff (x-1)^2=0 \iff x=1$

b) $f'(x) = \dfrac{2x^{\cancel{3}}(x-1)-3x^{\cancel{2}}(x-1)^2}{x^{\cancel{6}4}} = \dfrac{(x-1)[2x-3(x-1)]}{x^4} = \dfrac{(x-1)(3-x)}{x^4}$

$\dfrac{(x-1)(3-x)}{x^4} \geq 0$

N_1 $(x-1)\geq 0$ $x\geq 1$

N_2 $(3-x)\geq 0$ $x\leq 3$

D $x^4>0$ $\forall x\neq 0$

		0		1		3	
N_1	−		−	•	+		+
N_2	+		+		+	•	−
D	+	∅	+		+		+
$f'(x)$	−	∅	−	•	+	•	−
	↘		↘		↗		↘

$f(1)=0$; $f(3) = \dfrac{(3-1)^2}{(3)^3} = \dfrac{(2)^2}{27} = \dfrac{4}{27} = 0{,}148$

c) $f''(x) = \dfrac{x^4(4-2x)-4x^{3}(4x-x^2-3)}{x^{\cancel{8}5}} = \dfrac{x(4-2x)-4(4x-x^2-3)}{x^5} = \dfrac{2(x^2-6x+6)}{x^5}$

$\dfrac{2(x^2-6x+6)}{x^5} \geq 0$

N $x^2-6x+6 \geq 0$

$\dfrac{\Delta}{4} = 9-6=3$

$x_{1,2} = 3\pm\sqrt3$

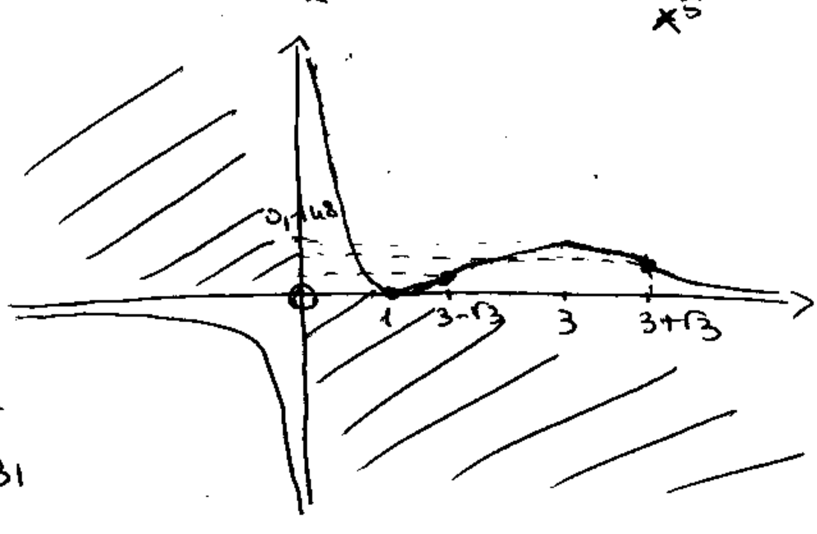
$+ \quad 3-\sqrt3 \quad - \quad 3+\sqrt3 \quad +$

D $x^5>0$, $x>0$

		0		$3-\sqrt3$		$3+\sqrt3$	
N	+		+	•	−	•	+
D	−	∅	+		+		+
$f''(x)$	−	∅	+	•	−	•	+
	∩		∪		∩		∪

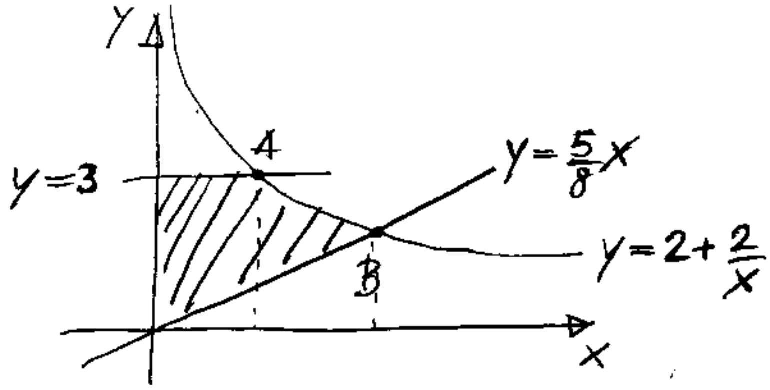
$f(3-\sqrt3)=0{,}035$

$f(3+\sqrt3)=0{,}131$



ATTENZIONE: con $\log x$ si intende il logaritmo naturale

4) (6 punti) Calcolate l'area della regione tratteggiata in figura.



coordinate x dei punti A e B	$x_A = 2$; $x_B = 4$
integrale/i per calcolare l'area	$\int_0^2 (3-\frac{5}{8}x)\,dx$; $\int_2^4 (2+\frac{2}{x}-\frac{5}{8}x)\,dx$
valore dell'area	6,38

Svolgimento:

$$A: \begin{cases} y=3 \\ y=2+\frac{2}{x} \end{cases} \quad \begin{cases} y=3 \\ 3=2+\frac{2}{x} \end{cases} \quad \begin{cases} y=3 \\ 1=\frac{2}{x} \end{cases} \quad \begin{cases} y_A=3 \\ x_A=2 \end{cases}$$

$$B: \begin{cases} y=\frac{5}{8}x \\ y=2+\frac{2}{x} \end{cases} \quad \begin{cases} y=\frac{5}{8}x \\ \frac{5}{8}x=2+\frac{2}{x} \end{cases} \quad \begin{cases} y=\frac{5}{8}x \\ 5x^2-16x-16=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_B=\frac{5}{2} \\ x_B=4 \end{cases}$$

$$A_1 = \int_0^{x_A} (\text{retta orizzontale} - \text{retta obliqua}) = \int_0^2 \left(3-\frac{5}{8}x\right)dx = \int_0^2 3\,dx - \int_0^2 \frac{5}{8}x\,dx =$$

$$= \left[3x - \frac{5}{8}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \left(3\cdot 2 - \frac{5}{16}\cdot 4\right) - 0 = 6 - \frac{5}{4} = \frac{24-5}{4} = \frac{19}{4}$$

$$A_2 = \int_{x_A}^{x_B} (\text{curva} - \text{retta obliqua}) = \int_2^4 \left[\left(2+\frac{2}{x}\right) - \left(\frac{5}{8}x\right)\right]dx =$$

$$= \int_2^4 2\,dx + \int_2^4 \frac{2}{x}\,dx - \int_2^4 \frac{5}{8}x\,dx = \left[2x + 2\log x - \frac{5}{8}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_2^4 =$$

$$= \left(2\cdot 4 + 2\log 4 - \frac{5}{16}\cdot 16\right) - \left(2\cdot 2 + 2\log 2 - \frac{5}{16}\cdot 4\right) = 3 + 2\log 2^2 - \frac{11}{4} - 2\log 2 = \frac{1}{4} + 2\log 2$$

$$A_{TOT} = A_1 + A_2 = \frac{19}{4} + \frac{1}{4} + 2\log 2 = \frac{20}{4} + 2\log 2 = 5 + 2\log 2 = 5 + 2\cdot 0{,}69 = 6{,}38$$

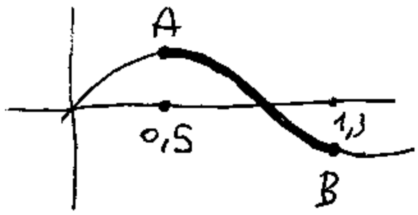
5) (6 punti) Considerate l'arco della curva $y = \sin(3x)$ compreso i due estremi $A = (0.5\ ,\ \sin(1.5))$ e $B = (1.3\ ,\ \sin(3.9))$.

a) Scrivete la lunghezza di tale arco tramite un opportuno integrale;

b) Chiamiamo I l'integrale del punto a). Calcolate un valore approssimato di I tramite il metodo di Simpson con $n = 4$ (attenzione all'uso dei gradi e dei radianti nel calcolo);

integrale I	
valore approssimato di I con $n = 4$	

Svolgimento:



$$\text{lunghezza} = \int_{0,5}^{1,3} \sqrt{1+(\text{derivata})^2}\, dx$$

$$= \int_{0,5}^{1,3} \sqrt{1+(3\cos(3x))^2}\, dx$$

$$\Delta x = \frac{1,3-0,5}{4} = \frac{0,8}{4} = 0,2$$

0,5 0,7 0,9 1,1 1,3

x	$\sqrt{1+(3\cos(3x))^2}$
0,5	1,0223
0,7	1,8149
0,9	2,8907
1,1	3,1267
1,3	2,3964

$$\text{lunghezza} = \int_{0,5}^{1,3} \sqrt{}\, dx \approx$$

$$\frac{\Delta x}{3}\left(f(0,5)+4f(0,7)+2f(0,9)+4f(1,1)+f(1,3)\right) \approx$$

$$\frac{0,2}{3}\cdot(28,9665) \approx 1,9311$$

Nome e cognome:

Scritto di Matematica per cdl in Viticoltura ed Enologia
Prova scritta del 13 Febbraio 2017

Negli esercizi 2, 3, 4 e 5 vi é richiesto di indicare, oltre alle risposte, anche i passaggi principali svolti per arrivare a dare quelle risposte.

Domande brevi

1a) (1,5 punti) Calcolare la derivata di $\frac{(2x+2)^{27}}{\cos x}$ in $x = 0$.

soluzione $27 \cdot 2^{27}$

$$f'(x) = \frac{27 \cdot (2x+2)^{26} \cdot 2 \cdot \cos x - (2x+2)^{27} \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$

$$f'(0) = \frac{27 \cdot (2)^{26} \cdot 2 - (2)^{27} \cdot 0}{1} = 27 \cdot 2^{27}$$

1b) (1,5 punti) Calcolare media e deviazione standard dei numeri $\{-2, -3, 7, 2\}$.

soluzione MEDIA = 1 , $\sigma = \sqrt{31/2} \simeq 3,9$

$$\text{MEDIA} = \frac{-2-3+7+2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(-2-1)^2+(-3-1)^2+(7-1)^2+(2-1)^2}{4}} = \sqrt{\frac{9+16+36+1}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{31}{2}} \simeq 3,9$$

1c) (1,5 punti) So che il massimo del valore assoluto della derivata quarta della funzione f nell'intervallo $[-1, 2]$ è 5. Quanto grande si deve prendere n per essere sicuri che il metodo di Simpson calcoli $\int_{-1}^{2} f(x)dx$ con una accuratezza di 0,0001?

soluzione

$$|\text{Errore di approssimazione}| \leq \frac{k\,(b-a)^5}{180\, n^4} = \frac{5 \cdot (2-(-1))^5}{180\, n^4} = \frac{5 \cdot 3^5}{180\, n^4}$$

Basta scegliere n in modo che $\frac{5 \cdot 3^5}{180\, n^4} < 0,0001$ cioè $n > \sqrt[4]{\frac{5 \cdot 3^5 \cdot 10^4}{180}}$

cioè $n > 16,1$

1d) (1,5 punti) Dire se $\frac{x^3}{x-\cos x}$ è la primitiva di $\frac{3x^2}{1+\sin x}$

soluzione NO

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^3}{x-\cos x}\right] = \frac{3x^2(x-\cos x) - x^3(1+\operatorname{sen} x)}{(x-\cos x)^2}$$

$$= \frac{3x^3 - 3x^2\cos x - x^3 - x^3 \operatorname{sen} x}{(x-\cos x)^2} \neq \frac{3x^2}{1+\operatorname{sen} x}$$

(N.B. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' \neq \frac{f'(x)}{g'(x)}$)

2) (7 punti) Considerate la funzione
$$f(x) = \frac{e^{2x} + x}{5}.$$

a) (2 punti) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f in $(0, 1/5)$.
b) (2 punti) Esiste un punto del grafico di f in cui la tangente ha coefficiente angolare $1/5$? Se esiste trovare quel punto. Altrimenti spiegare perché non c'è.
c) (3 punti) *(attenzione: domanda un po' diversa dalle solite)* Considera il pezzo del grafico fatta da tutti i punti che hanno coordinata x in $[0, 2]$ (è un arco di curva). In quale di questi punti il coefficiente angolare della retta tangente al grafico è minimo? Spiegare bene il perché.

risposta a a): $y = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$
risposta a b): esiste? perché? No, perché $\nexists x \in \mathbb{R}$ t.c. $f'(x) = 1/5$
risposta a b): se esiste scrivete le coordinate del punto
risposta a c): $x = 0$

Svolgimento:

a) $f'(x) = \dfrac{2e^{2x} + 1}{5}$

$m = f(0) = \dfrac{2 \cdot e^0 + 1}{5} = \dfrac{3}{5}$

$\Rightarrow r: y - y_0 = m(x - x_0) \to y - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}(x - 0)$

$\Rightarrow y - \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$

b) $f'(x) = \frac{1}{5} \Rightarrow \dfrac{2e^{2x} + 1}{\cancel{5}} = \dfrac{1}{\cancel{5}}$

$\Rightarrow 2e^{2x} + \cancel{1} = \cancel{1} \Rightarrow e^{2x} = 0$

Questa eq. non ha soluzione, quindi $\nexists x \in \mathbb{R}$ t.c. $f'(x) = \frac{1}{5}$

c) Consideriamo la funzione coeff. angolare
$m(x) = f'(x) = \dfrac{2e^{2x} + 1}{5}$

Per trovare il minimo di questa funzione possiamo studiare la sua derivata

$m'(x) = \frac{4}{5}e^{2x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ è crescente e quindi assume valore minimo in $[0, 2]$ quando $x = 0$.

$m'(0) = \frac{4}{5}$

(NB: si poteva anche osservare che essendo e^x sempre crescente, allora anche $\frac{2e^{2x}+1}{5}$ lo è, senza fare altre derivate).

3) (8 punti) Sia $f(x) = 3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}$.

Il dominio di f è $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ e inoltre $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

a) Dire dove f è negativa, dove è positiva e dove si annulla;
b) Scrivere la derivata prima di f e dire dove f cresce, dove decresce e dove f' è zero;
c) Scrivere la derivata seconda di f e dire dove f è concava verso l'alto;
d) Disegnare il grafico di f tenendo conto anche della concavità.

f è positiva in $(-\infty;0)\cup(0;\frac{1}{3})\cup(1;+\infty)$	è negativa in $(\frac{1}{3};1)$	è zero in $x=\frac{1}{3}$; $x=1$
derivata prima di f $\frac{2(2x-1)}{x^3}$		
f cresce in $(-\infty;0)\cup(\frac{1}{2};+\infty)$	e decresce in $(0;\frac{1}{2})$	
x in cui $f'=0$ e valore di f in essi $x=\frac{1}{2}$; $f(\frac{1}{2})=-1$		
derivata seconda di f		
f è concava verso l'alto in		

Svolgimento e grafico:

(a) $f(x) = \frac{3x^2-4x+1}{x^2} = \frac{(3x-1)(x-1)}{x^2}$

N_1 $3x-1 \geq 0$, $x \geq \frac{1}{3}$

N_2 $x-1 \geq 0$, $x \geq 1$

D $x^2 > 0$ $\forall x \neq 0$

		0		1/3		1	
N_1	$-$		$-$	•	$+$		$+$
N_2	$-$		$-$		$-$	•	$+$
D	$+$	o	$+$		$+$		$+$
	$+$	o	$+$	•	$-$	•	$+$

(b) $f'(x) = \frac{\cancel{x^2}(6x-4) - 2\cancel{x}(3x^2-4x+1)}{x^{\cancel{4}\,3}} = \frac{2(2x-1)}{x^3}$

$\frac{2(2x-1)}{x^3} \geq 0$

N $2x-1 \geq 0$, $x \geq \frac{1}{2}$

D $x^3 > 0$, $x > 0$

		0		1/2	
N	$-$		$-$	•	$+$
D	$-$	o	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	o	$-$	•	$+$
	↗		↘		↗

$f(\frac{1}{2}) = \frac{(3\cdot\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-1)}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{\frac{1}{4}} = -1$

(c) $f''(x) = 2\left[\frac{2\cdot x^3 - 3x^2(2x-1)}{(x^3)^2}\right] = \frac{2\cancel{x^2}[2x-6x+3]}{x^{\cancel{6}\,4}} = \frac{2(3-4x)}{x^4}$

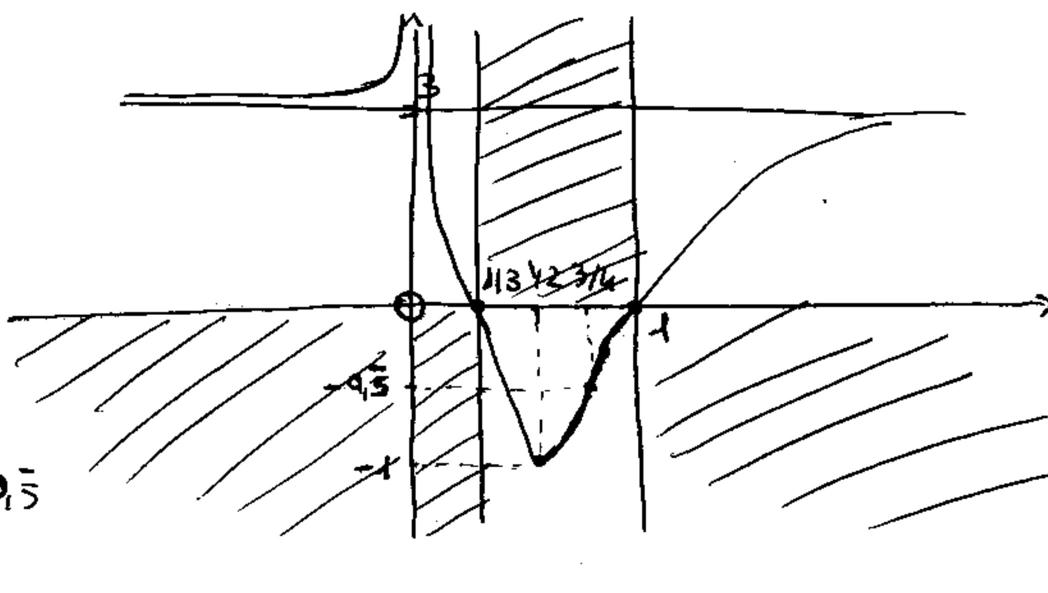
$\frac{2(3-4x)}{x^4} \geq 0$

N $3-4x \geq 0$, $x \leq \frac{3}{4}$

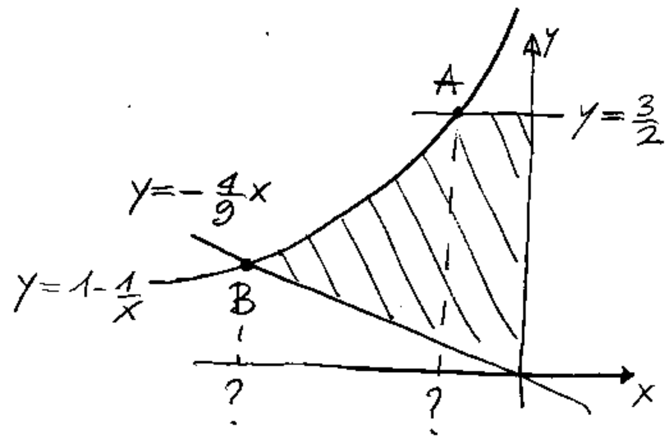
D $x^4 > 0$ $\forall x \neq 0$

		0		3/4	
N	$+$		$+$	•	$-$
D	$+$	o	$+$		$+$
$f''(x)$	$+$	o	$+$	•	$-$
	∪		∪		∩

$f(\frac{3}{4}) = 0{,}5$



4) (6 punti) Calcolate l'area della regione tratteggiata in figura.



coordinate x dei punti A e B	$x_A=-2$ $x_B=-3$
integrale/i per calcolare l'area	$\int_{-3}^{-2}\left(\left(1-\frac{1}{x}\right)-\left(-\frac{4}{9}x\right)\right)dx+\int_{-2}^{0}\left(\frac{3}{2}-\left(-\frac{4}{9}x\right)\right)dx$
valore dell'area	

Svolgimento:

$x_A: \begin{cases} y=\frac{3}{2} \\ y=1-\frac{1}{x} \end{cases}$ $\quad \frac{3}{2}=1-\frac{1}{x} \quad \frac{1}{x}=1-\frac{3}{2} \quad \frac{1}{x}=-\frac{1}{2} \quad x=2$

$x_B = \begin{cases} y=-\frac{4}{9}x \\ y=1-\frac{1}{x} \end{cases}$ $\quad -\frac{4}{9}x=1-\frac{1}{x} \quad \frac{-4x^2}{9x}=\frac{9x-9}{9x} \quad 4x^2+9x-9=0$

$x=\frac{-9\pm15}{8}$ $\begin{cases} \frac{-24}{8}=-3 \\ +\frac{6}{8}=+\frac{3}{4} \end{cases}$ poiche x_B è <0 scelgo $x=-3$

$$\text{Area}=\int_{-3}^{-2}\left(+\frac{4}{9}x\right)+\left(1-\frac{1}{x}\right)dx+\int_{-2}^{0}\frac{3}{2}-\left(-\frac{4}{9}x\right)dx=\int_{-3}^{-2}\frac{4}{9}x+1-\frac{1}{x}\,dx+\int_{-2}^{0}\frac{3}{2}+\frac{4}{9}x\,dx$$

$$=\left[\frac{4}{9}x^2+x-\ln|x|\right]_{-3}^{-2}+\left[\frac{3}{2}x+\frac{2}{9}x^2\right]_{-2}^{0}=\cancel{\frac{2}{9}4}-\frac{2}{9}\cdot9+(-2+3)+$$

$$(-\ln2+\ln3)+\left(0+\frac{3}{2}\cdot2\right)+\left(0-\cancel{\frac{2}{9}\cdot4}\right)=-2+1+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+3=$$

$$=2+\ln\left(\frac{3}{2}\right)\approx2{,}4054$$

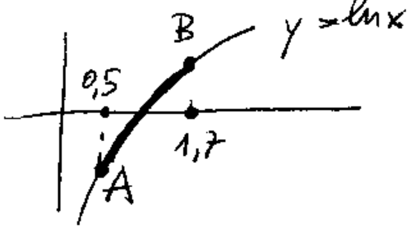
5) (6 punti) Considerate l'arco della curva $y = \ln x$ compreso i due estremi $A = (0.5\ ,\ \ln 0.5)$ e $B = (1.7\ ,\ \ln 1.7)$.

a) Scrivete la lunghezza di tale arco tramite un opportuno integrale;

b) Chiamiamo I l'integrale del punto a). Calcolate un valore approssimato di I tramite il metodo di Simpson con $n = 4$ (attenzione all'uso dei gradi e dei radianti nel calcolo);

integrale I	$\int_{0,5}^{1,7} \sqrt{1+ 1/x^2}\, dx$
valore approssimato di I con $n = 4$	

Svolgimento:



$$\text{lunghezza} = \int_{0,5}^{1,7} \sqrt{1 + (\text{derivata di } \ln x)^2}\, dx$$

$$= \int_{0,5}^{1,7} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx$$

$$\Delta x = \frac{1,7 - 0,5}{4} = \frac{1,2}{4} = 0,3$$

0,5 0,8 1,1 1,4 1,7

x	$\sqrt{1+1/x^2}$
0,5	2,2361
0,8	1,6008
1,1	1,3515
1,4	1,2289
1,7	1,1602

$$\text{lunghezza} = \int_{0,5}^{1,7} \sqrt{}\, dx$$

$$\approx \frac{\Delta x}{3} \cdot \Big(f(0,5) + 4 f(0,8) + 2 f(1,1) + 4 f(1,4) + f(1,7) \Big)$$

$$\approx 0,1 \cdot (17,4181) = 1,74181$$