Nome e cognome:

Scritto di Matematica per cdl in Viticoltura ed Enologia
Prova scritta del 14 Febbraio 2018

Negli esercizi 2, 3, 4 e 5 vi é richiesto di indicare, oltre alle risposte, anche i passaggi principali svolti per arrivare a dare quelle risposte.

Domande brevi

1a) (1,5 punti) Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva $y = \sqrt{3x+6}$ nel punto della curva la cui coordinata x è 1.

soluzione $y-3 = \frac{1}{2}(x-1)$ cioè $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

La retta passa per $x=1$ $y=\sqrt{3\cdot 1+6}$ cioè $x=1, y=3$

il suo m è uguale a $(\sqrt{3x+6})'$ calcolata in $x=1$, cioè a $\left.\frac{1}{2\sqrt{3x+6}}\cdot 3\right|_{x=1}$

cioè $m = \frac{3}{2\cdot 3} = \frac{1}{2}$.

1b) (1,5 punti) Un tubo getta acqua in un canale. Nella prima ora la portata del tubo e' sempre uguale a 30 litri al minuto mentre nella seconda ora la portata cambia. Al tempo t della seconda ora (con t misurato in minuti, con $t = 0$ corrispondente all'inizio della seconda ora) la portata è $30 - t/2$ litri al minuto. Il tubo quanti litri ha gettato nel canale nelle due ore?

soluzione $1800 + 900$

Acqua nella prima ora $30\cdot 60$

Acqua nella seconda ora $= \int_0^{60}\left(30-\frac{t}{2}\right)dt = \left[30t - \frac{t^2}{4}\right]_0^{60} = 30\cdot 60 - 900 = 900$

1c) (1,5 punti) Dire per quali x la seguente espressione è maggiore o uguale a 0:

$$x + \frac{64}{x+16}.$$

soluzione $x \geq -16$

$\frac{x(x+16)+64}{x+16} \geq 0$ $\quad \frac{x^2+16x+64}{x+16} \geq 0$ $\quad \frac{(x+8)^2}{x+16} \geq 0$

$(x+8)^2$ + + + 0 + (−16, −8)

$x+16$ − − | + + | + +

1d) (1,5 punti) Calcolare la deviazione standard dei numeri $-5, 0, 7, 2$.

soluzione $\sqrt{18,5}$

media $= \frac{-5+7+2}{4} = 1$

varianza $= \frac{(-5-1)^2+(0-1)^2+(7-1)^2+(2-1)^2}{4} = \frac{36+1+36+1}{4} = \frac{37}{2} = 18.5$

dev. st $= \sqrt{18,5} = 4,301$

2) (6 punti) Sappiamo che la massa di una sostanza radioattiva è una funzione esponenziale del tempo. Inizialmente la massa è 100 e dopo 3 giorni è diventata 20.

a) Quale sarà la massa dopo 6 giorni?
b) E dopo 8 giorni?
c) Dopo quanti giorni la massa diventa esattamente 10?

dopo 6 giorni:	4
dopo 8 giorni:	1,367 8
numero di giorni necessari per diventare 10	4,29

Svolgimento:

~~Metodo~~ Sappiamo che massa $= a\,p^t$

1° metodo a è uguale alla massa iniziale, cioè 100

p è $\left(\frac{20}{100}\right)^{\frac{1}{3}}$ 3 giorni

Quindi massa $= 100 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{t}{3}}$

2° metodo: sistema

massa$(0) = 100 \Rightarrow a \cdot p^0 = 100$

massa$(3) = 20 \Rightarrow a\,p^3 = 20$

$$\begin{cases} a\,p^0 = 100 \\ a\,p^3 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 100 \\ 100 \cdot p^3 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 100 \\ p = \sqrt[3]{\frac{1}{5}} \end{cases}$$

massa$(6) = 100\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{100}{25} = 4$

massa$(8) = 100 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{8}{3}} = 1,367$

per quale t $m(t) = 10$? Risolvo l'equazione $100\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{t}{3}} = 10$

$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{t}{3}} = \frac{1}{10}$ $\frac{t}{3} = \log_{1/5} \frac{1}{10} = \frac{\ln 1/10}{\ln 1/5} = 1,43$

$t = 3 \cdot 1,43 = 4,29$

3) (8 punti) Sia $f(x) = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{2x} + 6\right) e^{2x}$.

La funzione ha come dominio $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$. I limiti sono:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

a) Dire dove f è negativa, dove è positiva e dove si annulla;
b) Scrivere la derivata prima di f e dire dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;
c) Disegnare il grafico di f (senza tener conto della concavità).

intervalli in cui f è positiva $\left(-\frac{1}{12}, 0\right)$	intervalli in cui è negativa altrove
e x in cui f è zero $x = -\frac{1}{12}$	
derivata prima di f $\frac{e^{2x}}{10}\cdot\left(\frac{24x^2+2x-1}{2x^2}\right) = \frac{e^{2x}}{10}\left(12 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}\right)$	
intervalli in cui f cresce $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{6}, +\infty\right)$	e in cui decresce $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right)$
x in cui si annulla f' e valore di f in essi $x = -\frac{1}{4}$ $f\left(-\frac{1}{4}\right) = 0{,}24$ $x = \frac{1}{6}$ $f\left(\frac{1}{6}\right) = 1{,}25$	

Svolgimento e grafico:

$$f = 0 \Rightarrow \frac{1}{2x} + 6 = 0 \Rightarrow \frac{1+12x}{2x} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{12}$$

segno di f = segno di $\frac{1}{2x} + 6$ =

	$-1/12$	0	
$1+12x$			
$2x$			
f	+	−	+

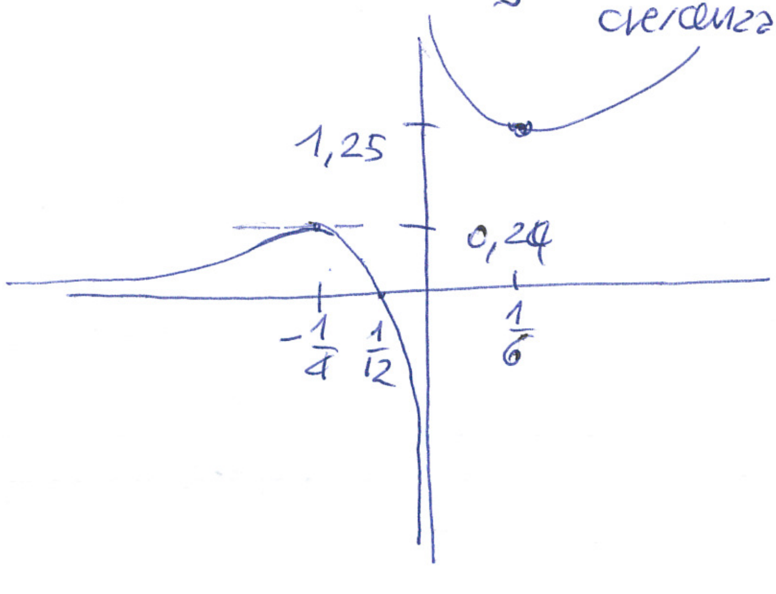
$$\left[\frac{1}{10}\left(\frac{1}{2x}+6\right)e^{2x}\right]' = \frac{1}{10}\left[\left(\frac{1}{2x}+6\right)e^{2x}\right]' = \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{1}{2x}+6\right)'e^{2x} + \frac{1}{10}\left(\frac{1}{2x}+6\right)\left(e^{2x}\right)'$$

$$= \frac{1}{10}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)e^{2x} + \frac{1}{10}\left(\frac{1}{2x}+6\right)2e^{2x} = \frac{1}{10}e^{2x}\left[-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} + 12\right]$$

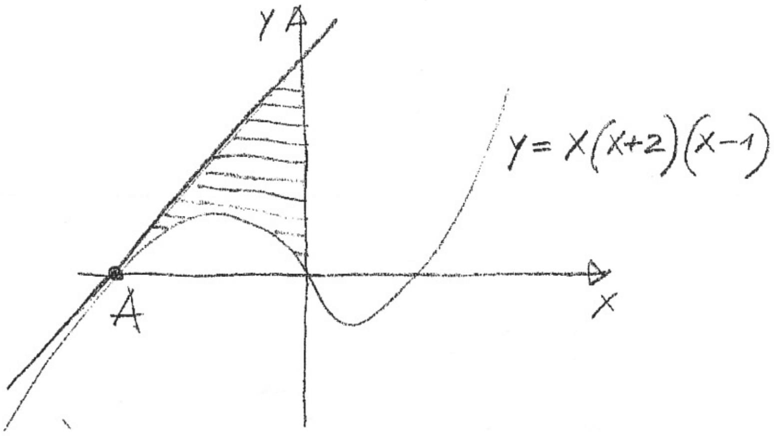
$$= \frac{1}{10}e^{2x}\left[\frac{24x^2+2x-1}{2x^2}\right]$$

segno di f': $+ \quad - \quad +$

crescenza di f: $\nearrow \; -\frac{1}{4} \; \searrow \; \frac{1}{6} \; \nearrow$



4) (6 punti) Calcolate l'area dell'insieme tratteggiato disegnato nella figura. La retta obliqua nella figura è la retta tangente alla curva nel punto A.



equazione della retta tangente	$y = 6x + 12$
integrale/i per calcolare l'area	$\int_{-2}^{0} 6x+12 - x(x+2)(x-1)\, dx$
valore dell'area	$6,\overline{6}$

Svolgimento:

Per trovare la coordinata di A
Calcolo le intersezioni della curva con l'asse x, sono gli x in cui $x(x+2)(x-1) = 0$ cioè $x=-2$, $x=0$ e $x=1$.
Quindi $A=(-2,0)$

Calcolo l'equazione della retta tangente alla curva $y=x(x+2)(x-1)$ in A. Il coeff. angolare è la derivata di $x(x+2)(x-1)$ in $x=-2$

$(x(x+2)(x-1))' = x'(x+2)(x-1) + x(x+2)'(x-1) + x(x+2)(x-1)' = (x+2)(x-1) + x(x-1) + x(x+2)$

Quando $x=-2$ la derivata diventa $0 + (-2)(-3) + 0$ cioè $+6$
Allora l'eq. della retta tangente è $y = 6(x+2) = 6x+12$

Allora Area $= \int_{-2}^{0} 6x+12 - (x(x+2)(x+1))\, dx = \int_{-2}^{0} 6x+12-(x^3+x^2-2x)\, dx$

$= \int_{-2}^{0} -x^3 - x^2 + 8x + 12\, dx = -\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 4x^2 + 12x \Big]_{-2}^{0} = 0 + 4 + \frac{8}{3} - 16 + 24$

$= 9,\overline{3}$

5) (7 punti) Considerate l'integrale $\displaystyle\int_1^{2,6} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{x} + \frac{1}{2x}\,dx.$

a) Calcolatelo tramite il metodo delle primitive;
b) Calcolatelo tramite il metodo di Simpson con $n = 4$.
(attenzione all'uso dei gradi o radianti)

primitiva	
valore calcolato tramite metodo primitive	
valore calcolato tramite metodo di Simpson	

Svolgimento:

$$\int_1^{2,6} \frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{x} + \frac{1}{2x}\,dx = \int_1^{2,6} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx + \sqrt{2}\int_1^{2,6} \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int_1^{2,6} \frac{1}{x}\,dx$$

$$= +2\sqrt{x}\,\Big]_1^{2,6} + \sqrt{2}\ln x\,\Big]_1^{2,6} + \frac{1}{2}\ln x\,\Big]_1^{2,6} =$$

$$2\left(\sqrt{2,6}-1\right) + \sqrt{2}\left(\ln 2,6 - \ln 1\right) + \frac{1}{2}\left(\ln 2,6 - \ln 1\right)$$

$$= 1,2249 + 1,3513 + 0,4777 = 3,0539$$

1   1,4   1,8   2,2   2,6

x	f(x)
1	2,9142
1,4	2,2124
1,8	1,8088
2,2	1,5443
2,6	1,3564

$$\int \approx \frac{0,4}{3}\cdot\left(2,9142 + 4\cdot 2,2124 + 2\cdot 1,8088 + 4\cdot 1,5443 + 1,3564\right)$$

$$= 3,055\overline{3}$$

Nome e cognome:

Scritto di Matematica per cdl in Viticoltura ed Enologia
Prova scritta del 14 Febbraio 2018

Negli esercizi 2, 3, 4 e 5 vi é richiesto di indicare, oltre alle risposte, anche i passaggi principali svolti per arrivare a dare quelle risposte.

Domande brevi

1a) (1,5 punti) Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva $y = ln(3x+1)$ nel punto della curva la cui coordinata x è 0.

soluzione $y = 3x$

$m = y'(0)$ $\quad y'(x) = \frac{3}{3x+1}$ $\quad y'(0) = 3$. Il punto di tangenza è $(0,0)$

L'eq. della retta è $y = 3x$

1b) (1,5 punti) Un tubo getta acqua in un canale. Nella prima ora la portata del tubo e' sempre uguale a 100 litri al minuto mentre nella seconda ora la portata cambia. Al tempo t della seconda ora (con t misurato in minuti, con $t = 0$ corrispondente all'inizio della seconda ora) la portata è $100 + 0,1\,t^2$ litri al minuto. Il tubo quanti litri ha gettato nel canale nelle due ore?

soluzione $6000 + 13200 = 19200$

Acqua nella prima ora: $100 \cdot 60 = 6000$

Acqua nella seconda ora: $\int_0^{60} (100 + 0,1\,t^2)\,dt = \left[100t + 0,1\frac{t^3}{3}\right]_0^{60} = 13200$

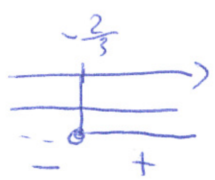
1c) (1,5 punti) Dire per quali x la seguente espressione è maggiore o uguale a 0:

$$3x + \frac{1}{3x+2}.$$

soluzione $x > -\frac{2}{3}$

$\frac{9x^2+6x+1}{3x+2} \geq 0$ $\quad N \geq 0 : 9x^2+6x+1 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$D > 0 : 3x+2 > 0 \rightarrow x > -\frac{2}{3}$



1d) (1,5 punti) Calcolare la deviazione standard dei numeri $-2, 0, 2, 12$.

soluzione 5,38

media $= \frac{-2+0+2+12}{4} = 3$

varianza $= \frac{(-2-3)^2+(0-3)^2+(2-3)^2+(12-3)^2}{4} = \frac{25+9+1+81}{4} = 29$

deviazione standard $= \sqrt{29} = 5,38$

2) (6 punti) Sappiamo che la massa di una sostanza radioattiva è una funzione esponenziale del tempo. Inizialmente la massa è 20 e dopo 5 giorni è diventata 5.

a) Quale sarà la massa dopo 10 giorni?

b) E dopo 12 giorni?

c) Dopo quanti giorni la massa diventa esattamente 2?

dopo 10 giorni:	1,25
dopo 12 giorni:	0,717
numero di giorni necessari per diventare 2	8,30

Svolgimento:

$$\text{massa}(t) = a\,p^t$$

Dai dati ho:

$$\text{massa}(0) = 20 \Rightarrow a p^0 = 20 \Rightarrow a = 20$$

$$\text{massa}(5) = 5 \Rightarrow a p^5 = 5$$

$$\begin{cases} a p^0 = 20 \\ a p^5 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 20 \\ 20 p^5 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 20 \\ p = \sqrt[5]{\frac{1}{4}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{massa}(t) = 20\left(\sqrt[5]{\frac{1}{4}}\right)^t = 20\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{t}{5}}$$

a) $\text{massa}(10) = 20\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{10}{5}} = 1,25$

b) $\text{massa}(12) = 20\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{12}{5}} = 0,717$

c) $\text{massa}(t) = 2 \Rightarrow 20\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{t}{5}} = 2$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{t}{5}} = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{t}{5} = \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{\ln\left(\frac{1}{10}\right)}{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}$$

$$\Rightarrow t = 5\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{10}\right)}{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}\right) = 8,30$$

3) (8 punti) Sia $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - 6\right) e^{-x}$.

La funzione ha come dominio $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$. I limiti sono:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

a) Dire dove f è negativa, dove è positiva e dove si annulla;
b) Scrivere la derivata prima di f e dire dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;
c) Disegnare il grafico di f (senza tener conto della concavità).

intervalli in cui f è positiva $\left(0, \frac{1}{6}\right)$	intervalli in cui è negativa altrove
e x in cui f è zero $\frac{1}{6}$	
derivata prima di f $\frac{1}{2}e^{-x}\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 6\right)$ cioè $\frac{1}{2}e^{-x}\left(\frac{6x^2-x-1}{x^2}\right)$	
intervalli in cui f cresce	e in cui decresce
x in cui si annulla f' e valore di f in essi	

Svolgimento e grafico:

$e^{-x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - 6\right)e^{-x} \geq 0$

$\left(\frac{1}{x} - 6\right) \geq 0 \Rightarrow \frac{1-6x}{x} \geq 0$

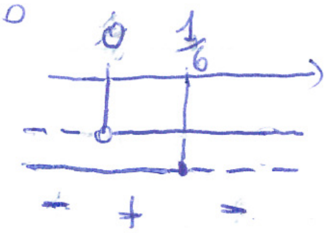
$N \geq 0 : 1 - 6x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{6}$

$D > 0 : x > 0$

$f(x) < 0 : (-\infty, 0) \vee \left(\frac{1}{6}, +\infty\right)$

$f(x) > 0 : \left(0, \frac{1}{6}\right)$

$f(x) = 0 : x = \frac{1}{6}$



$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[e^{-x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) - e^{-x}\left(\frac{1-6x}{x}\right)\right] = \frac{1}{2}e^{-x}\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 6\right) =$$

$$= \frac{1}{2}e^{-x}\left(\frac{6x^2-x-1}{x^2}\right)$$

PUNTI CRITICI: $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}e^{-x}\left(\frac{6x^2-x-1}{x^2}\right) = 0$ cioè quando

$6x^2 - x - 1 = 0$. Le soluzioni sono $x = -\frac{1}{3} \vee x = \frac{1}{2}$

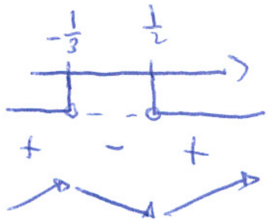
$f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{1}{2}e^{-x}\cdot\left(\frac{6x^2-x-1}{x^2}\right) > 0 \Rightarrow e^{-x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\frac{1}{2} > 0$ sempre

$\frac{6x^2-x-1}{x^2} > 0$. Studiando:

$N > 0 : x < -\frac{1}{3} \vee x > \frac{1}{2}$

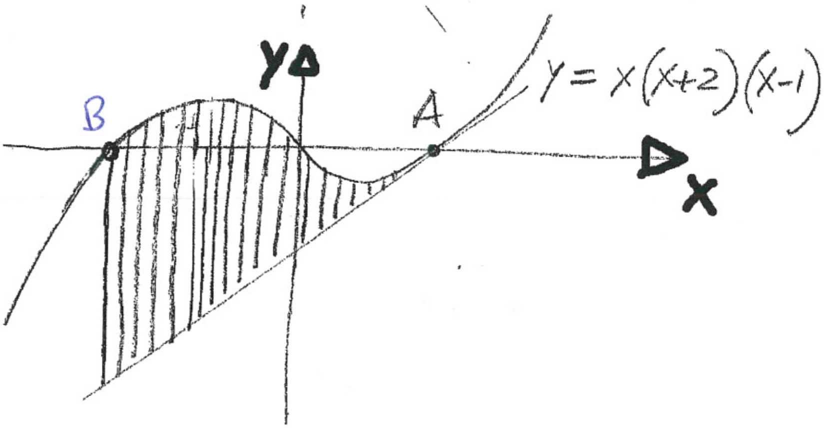
$D > 0 : x^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$



$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -6{,}28$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = -1{,}21$

4) (6 punti) Calcolate l'area dell'insieme tratteggiato disegnato nella figura. La retta obliqua nella figura è la retta tangente alla curva nel punto A.



equazione della retta tangente	
integrale/i per calcolare l'area	
valore dell'area	

Svolgimento:

$$y = x(x+2)(x-1) = x^3 + x^2 - 2x$$

Eq. retta tg:

$m = y'(1)$

$y'(x) = 3x^2 + 2x - 2 \qquad y'(1) = 3$

$\Rightarrow$ la retta tg ha eq. $y = 3x - 3$

$x_A : \begin{cases} y = 0 \\ x^3 + x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x(x^2 + x - 2) = 0 \end{cases}$

$x = 0$

$x^2 + x - 2 = 0$: $x = -2$, $x = 1$

Scelgo questo valore guardando il grafico

$\Rightarrow x_A = 1$

$A \equiv (1, 0)$

$x_B : \begin{cases} y = 0 \\ x^3 + x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

$\Rightarrow B \equiv (-2, 0)$

$$A = \int_{-2}^{1} (x^3 + x^2 - 2x) - (3x - 3)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 - \frac{3}{2}x^2 + 3x \right]_{-2}^{1} = 15.75$$

5) (7 punti) Considerate l'integrale $\displaystyle\int_1^{2,6} x(\sqrt{x}+\sqrt{2}) + \frac{\cos x}{3}\, dx.$

a) Calcolatelo tramite il metodo delle primitive;

b) Calcolatelo tramite il metodo del trapezio con $n = 4$.

(attenzione all'uso dei gradi o radianti)

primitiva
valore calcolato tramite metodo primitive
valore calcolato tramite metodo del trapezio

Svolgimento:

a) $$\int_1^{2,6} x(\sqrt{x}+\sqrt{2}) + \frac{\cos x}{3}\, dx = \int_1^{2,6} x\sqrt{x} + x\sqrt{2} + \frac{\cos x}{3}\, dx =$$

$$= \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \sqrt{2}\,\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\,\text{sen}\, x\right]_1^{2,6} =$$

$$= \frac{2}{5}(2,6)^{\frac{5}{2}} + \sqrt{2}\,\frac{(2,6)^2}{2} + \frac{1}{3}\,\text{sen}(2,6) - \frac{2}{5}(1)^{\frac{5}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3}(\text{sen}(1)) =$$

$$= 4,36 + 4,78 + 0,17 - 0,4 - 0,71 - 0,28 = 7,92$$

b) Metodo del Trapezio

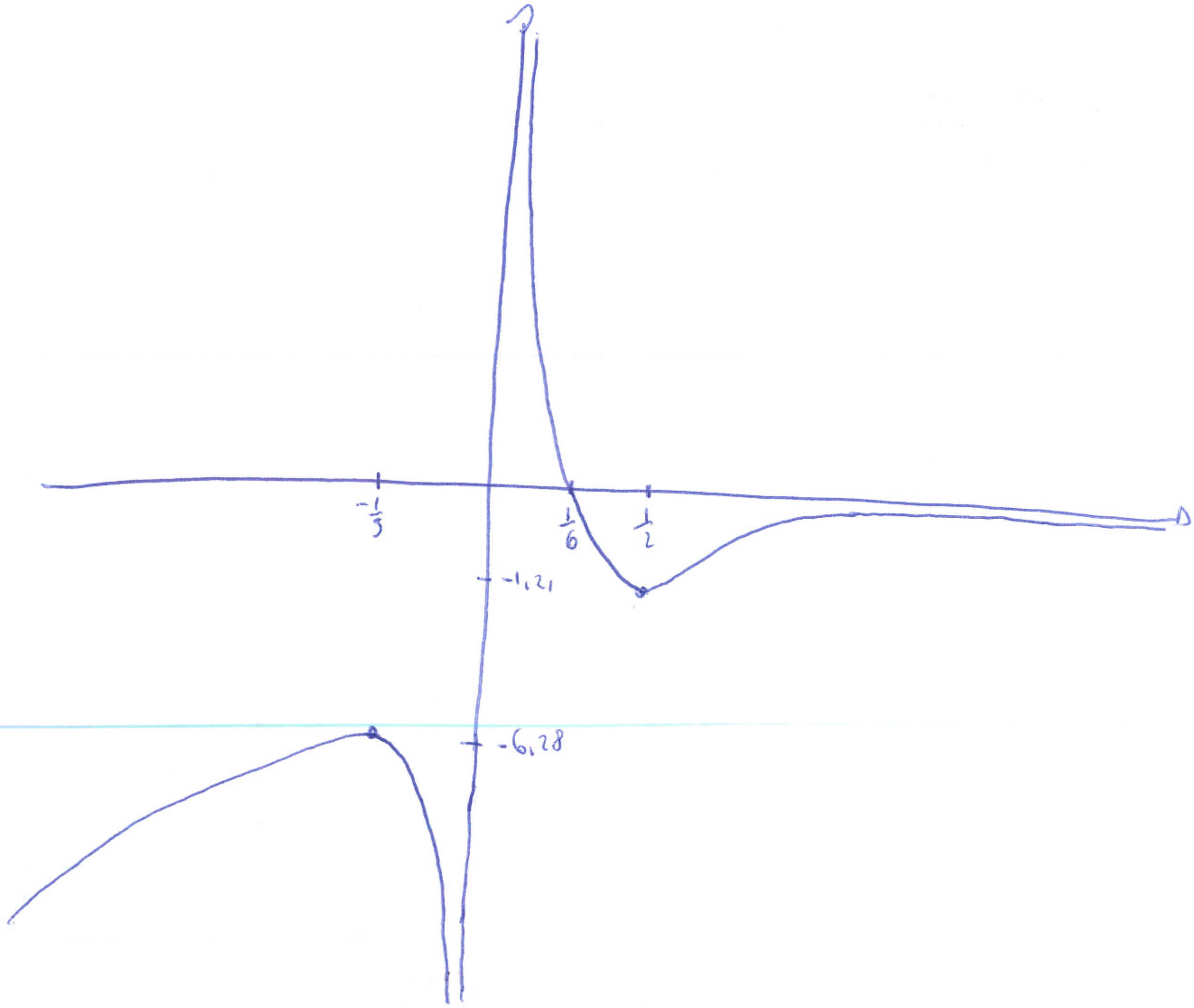
$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2,6-1}{4} = 0,4$$

1 1,4 1,8 2,2 2,6

x	$f(x)$
1	2,59
1,4	3,69
1,8	4,88
2,2	6,17
2,6	7,58

$$\int_1^{2,6} x(\sqrt{x}+\sqrt{2}) + \frac{\cos x}{3}\, dx \simeq 0,2\,(2,59 + 2\cdot 3,69 + 2\cdot 4,88 + 2\cdot 6,17 + 7,58) \simeq 7,93$$

GRAFICO es. 3



Nome e cognome:

Scritto di Matematica per cdl in Viticoltura ed Enologia
Prova scritta del 14 Febbraio 2018

Negli esercizi 2, 3, 4 e 5 vi é richiesto di indicare, oltre alle risposte, anche i passaggi principali svolti per arrivare a dare quelle risposte.

Domande brevi

1a) (1,5 punti) Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva $y = \sin(3\pi x)$ nel punto della curva la cui coordinata x è 1.

soluzione $y = -9{,}42x + 9{,}42$ $(y = -3\pi x + 3\pi)$

$m = y'(1)$ $\quad y'(x) = 3\pi \cos(3\pi x)$ $\quad y'(1) = 3\pi \cos(3\pi) = -3\pi \approx -9{,}42$

Il punto di Tangenza è $(1, \underbrace{\operatorname{sen}(3\pi)}_{=0})$. La retta Tg sarà $y = -9{,}42(x-1) = -9{,}42x + 9{,}42$

1b) (1,5 punti) Un tubo getta acqua in un canale. Nella prima ora la portata del tubo e' sempre uguale a 10 litri al minuto mentre nella seconda ora la portata cambia. Al tempo t della seconda ora (con t misurato in minuti, con $t = 0$ corrispondente all'inizio della seconda ora) la portata è $10 + t/2$ litri al minuto. Il tubo quanti litri ha gettato nel canale nelle due ore?

soluzione $600 + 1500 = 2100$

Acqua nella prima ora: $10 \cdot 60 = 600$

Acqua nella seconda ora: $\int_0^{60} (10 + \frac{t}{2})\,dt = \left[10t + \frac{t^2}{4}\right]_0^{60} = 1500$

1c) (1,5 punti) Dire per quali x la seguente espressione è maggiore o uguale a 0:

$$-4x - \frac{1}{x-1}.$$

soluzione $x < 1$

$\frac{-4x^2+4x-1}{x-1} \geq 0 \Rightarrow$ $N \geq 0$ $\quad -4x^2+4x-1 \geq 0$ $\quad \nexists x \in \mathbb{R}$ (sempre $-$)

$D > 0$ $\quad x-1 > 0 \quad \to \quad x > 1$

1

$-$ $-$ $-$

$+$ $-$

1d) (1,5 punti) Calcolare la deviazione standard dei numeri $-2, -2, 1, 11$.

soluzione 5.33

media $= \frac{-2-2+1+11}{4} = 2$

varianza $= \frac{(-2-2)^2 + (-2-2)^2 + (1-2)^2 + (11-2)^2}{4} = 28.5$

dev. standard: $\sqrt{28{,}5} = 5{,}33$

2) (6 punti) Sappiamo che la massa di una sostanza radioattiva è una funzione esponenziale del tempo. Inizialmente la massa è 1000 e dopo 4 giorni è diventata 250.

a) Quale sarà la massa dopo 8 giorni?

b) E dopo 10 giorni?

c) Dopo quanti giorni la massa diventa esattamente 100?

dopo 8 giorni:
dopo 10 giorni:
numero di giorni necessari per diventare 100

Svolgimento:

massa $(t) = a\,p^t$

Dai dati ho:

massa $(0) = 1000 \Rightarrow a p^0 = 1000 \Rightarrow a = 1000$

massa $(4) = 250 \Rightarrow a p^4 = 250$

$$\begin{cases} a p^0 = 1000 \\ a p^4 = 250 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1000 \\ 1000\, p^4 = 250 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1000 \\ p^4 = \frac{\cancel{250}^{\,1}}{\cancel{1000}_{\,4}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1000 \\ p = \sqrt[4]{\frac{1}{4}} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ massa $(t) = 1000 \left(\sqrt[4]{\frac{1}{4}}\right)^t = 1000 \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{t}{4}}$

a) massa $(8) = 1000 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 62{,}5$

b) massa $(10) = 1000 \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{10}{4}} = 31{,}25$

c) massa $(t) = 100 \Rightarrow 1000 \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{t}{4}} = 100$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{t}{4}} = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{t}{4} = \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{\ln\left(\frac{1}{10}\right)}{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}$$

$$\Rightarrow t = 4 \left(\frac{\ln\left(\frac{1}{10}\right)}{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}\right) = 6{,}64$$

$H_{TOT} = \frac{[redacted]}{12} =$ [redacted]

3) (8 punti) Sia $f(x) = \left(\frac{1}{x} + 3\right) e^{\frac{1}{2}x}$.

La funzione ha come dominio $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$. I limiti sono:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

a) Dire dove f è negativa, dove è positiva e dove si annulla;
b) Scrivere la derivata prima di f e dire dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;
c) Disegnare il grafico di f (senza tener conto della concavità).

intervalli in cui f è positiva $(-\infty, -\frac{1}{3}) \vee (0, +\infty)$	intervalli in cui è negativa $(-\frac{1}{3}, 0)$
e x in cui f è zero $x = -\frac{1}{3}$	
derivata prima di f $\quad e^{\frac{1}{2}x}\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x} + \frac{3}{2}\right)$ cioè $e^{\frac{1}{2}x}\left(\frac{3x^2+x-2}{2x^2}\right)$	
intervalli in cui f cresce $(-\infty, -1) \cup (\frac{2}{3}, +\infty)$	e in cui decresce $(-1, \frac{2}{3})$
x in cui si annulla f' e valore di f in essi $x = -1 \quad f(-1) =$	$x = \frac{2}{3} \quad f(\frac{2}{3}) =$

Svolgimento e grafico:

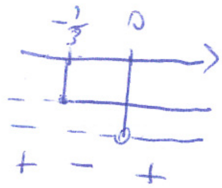
$e^{\frac{1}{2}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) \geq 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{x} + 3\right) e^{\frac{1}{2}x} \geq 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{x} + 3\right) \geq 0 \Rightarrow \frac{1+3x}{x} \geq 0$

$f(x) > 0 \quad : \quad (-\infty, -\frac{1}{3}) \vee (0, +\infty)$ $\qquad N \geq 0 \ : \ x \geq -\frac{1}{3}$

$f(x) < 0 \quad : \quad (-\frac{1}{3}, 0)$ $\qquad D > 0 \ : \ x > 0$

$f(x) = 0 \quad : \quad x = -\frac{1}{3}$



$$f'(x) = e^{\frac{1}{2}x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + 3\right) e^{\frac{1}{2}x} = e^{\frac{1}{2}x}\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x} + \frac{3}{2}\right) =$$

$$= e^{\frac{1}{2}x}\left(\frac{+3x^2 + x - 2}{2x^2}\right)$$

PUNTI CRITICI : $f'(x) = 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{2}x}\left(\frac{3x^2+x-2}{2x^2}\right) = 0$ cioè quando

$3x^2 + x - 2 = 0$. Le soluzione dell'eq. sono $x_1 = -1 \ \vee \ x_2 = \frac{2}{3}$

$f'(x) > 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{2}x}\left(\frac{3x^2+x-2}{2x^2}\right) > 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{2}x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

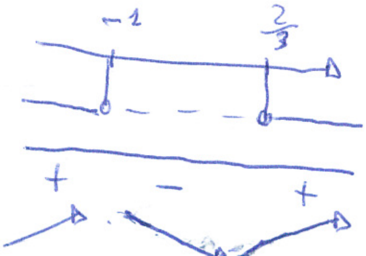
$\frac{3x^2+x-2}{2x^2} > 0$. Studiando:

$N > 0 \ : \ 3x^2 - x - 2 > 0$ se $x < -1 \ \vee \ x > \frac{2}{3}$

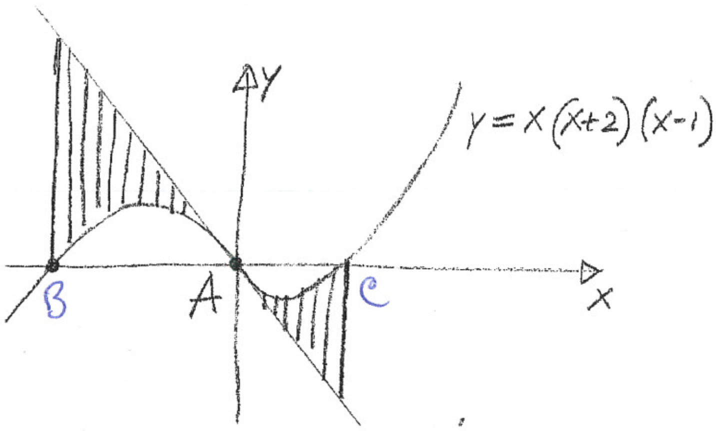
$D > 0 \ : \ 2x^2 > 0$ per ogni x appartenente al dominio

$f(-1) = 2e^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{e}} = 1{,}21$

$f(\frac{2}{3}) = \frac{9}{2} e^{\frac{1}{3}} = 3{,}22$



4) (6 punti) Calcolate l'area dell'insieme tratteggiato disegnato nella figura. La retta obliqua nella figura è la retta tangente alla curva nel punto A.



equazione della retta tangente
integrale/i per calcolare l'area
valore dell'area

Svolgimento: $A \equiv (0,0)$

$y = x(x+2)(x-1) = x^3 + x^2 - 2x$

Eq. della retta Tg:

$m = y'(0) \qquad y'(x) = 3x^2 + 2x - 2 \qquad y'(0) = -2$

$\Rightarrow$ la retta Tg ~~...~~ ha eq. $y = -2x$

$B \equiv (x_B, 0) \qquad C \equiv (x_C, 0)$

$x_B : \begin{cases} y = 0 \\ y = x^3 + x^2 - 2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x(x^2 + x - 2) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2 \\ x = +1 \end{cases}$

Scelgo queste guardando il grafico

$\Rightarrow x_B = -2$

$x_C : \begin{cases} y = 0 \\ x^3 + x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x(x^2 + x - 2) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2 \\ x = +1 \end{cases}$

$x_C = 1$

$A_{TOT} = A_1 + A_2$

$A_1 = \int_{-2}^{0} (-2x - (x^3 + x^2 - 2x))\,dx = \int_{-2}^{0} -x^3 - x^2\,dx = \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{0} = \frac{4}{3}$

$A_2 = \int_0^1 ((x^3 + x^2 - 2x) - (-2x))\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{7}{12}$

$A_{TOT} = \frac{23}{12} = 1{,}91\overline{6}$

5) $$\int_1^{2,6} (\sqrt{x}+\sqrt{2})^2 + \frac{1}{2(x^2+1)}\,dx$$

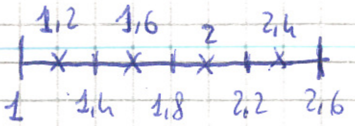
a) $$\int_1^{2,6} x + 2 + 2\sqrt{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2(x^2+1)}\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 2x + \frac{4\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\,\text{arctg}(x) \right]_1^{2,6} =$$

$$= 3,38 + 5,2 + 7,81 + 0,6 - 0,5 - 2 - 1,88 - 0,39 = 12,32$$

b) Metodo dei pt. medi:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2,6-1}{4} = 0,4$$



x	$f(x)$
1,2	6,5
1,6	7,32
2	8,01
2,4	8,86

$$\int_1^{2,6} (\sqrt{x}+\sqrt{2})^2 + \frac{1}{2(x^2+1)}\,dx \simeq 0,4\,(6,5+7,32+8,01+8,86)$$

$$\simeq 12,28$$

GRAFICO es. 3