Nome e cognome:

Prova scritta di Matematica per cdl in Viticoltura ed Enologia
15 Settembre 2016

Negli esercizi 2, 3, 4 e 5 vi é richiesto di indicare, oltre alle risposte, anche i passaggi principali svolti per arrivare a dare quelle risposte.

Domande brevi

1a) (1,5 punti) Scrivere il coefficiente angolare della retta che è tangente alla curva $y = \ln(3x^2 + 2)$ nel punto $(1, \ln 5)$.

soluzione

$m = f'(1)$ $\quad f'(x) = \frac{1}{3x^2+2} \cdot 6x = \frac{6x}{3x^2+2}$

$f'(1) = \frac{6}{5}$

1b) (1,5 punti) Scrivere la derivata seconda di $(\cos x)^{100}$ in $x = 0$.

soluzione

$f' = 100\,(\cos x)^{99} \cdot (-\operatorname{sen} x) = -100\,(\cos x)^{99} \operatorname{sen} x$

$f'' = -100\left(99 (\cos x)^{98} (-\operatorname{sen}^2 x) + (\cos x)^{99} \cdot \cos x\right)$

$f'(0) = -100\left(99(1)^{98} \cdot 0 + (1)^{99} \cdot 1\right) = -100$

1c) (1,5 punti) Dire se la funzione $x^2 \cos x + x$ è primitiva della funzione $2x \cos x - x^2 \sin x + 1$.

soluzione

Sì, perché la derivata di $x^2 \cos x + x$ è $2x \cdot \cos x + x^2(-\operatorname{sen} x) + 1$

1d) (1,5 punti) Studiare il segno della funzione $1 + \frac{10}{x^2+6x}$.

soluzione

scriviamola come una frazione $\frac{x^2+6x+10}{x^2+6x}$

segno di x^2+6+10 : sempre positivo (perché $\Delta<0$ e il coeff. di x^2 è pos.)

segno di x^2+6x $\quad + \;|\; - \;|\; +$ (-6, 0)

Quindi ~~segno $1+\frac{10}{x^2+6x}$~~ $\quad + \;|\; - \;|\; +$ (-6, 0)

2) (5 punti) Calcolate il valore massimo e il valore minimo di $\sqrt{x}\,(-3x^2 + 20x - 45)$ quando x varia nell'intervallo $[\frac{1}{2}, 4]$

valore massimo= $-20,7$	
valore minimo= -28	

Svolgimento:

La teoria ci dice che il massimo e il minimo esistono certamente dato che $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$ contiene i suoi due estremi, è un insieme limitato e $\sqrt{x}\,(-3x^2+20x-45)$ è continua nell'insieme $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$

Essi sono o in $x = \frac{1}{2}$ o in $x = 4$ oppure in un punto dell'intervallo in cui la derivata della funzione è zero.

Calcoliamo questa derivata

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(-3x^2+20x-45\right) + \sqrt{x}\left(-6x+20\right)$$

$$= \frac{-3x^2+20x-45 + 2\sqrt{x}\sqrt{x}\left(-6x+20\right)}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{-3x^2+20x-45 + 2x\left(-6x+20\right)}{2\sqrt{x}} = \frac{-15x^2+60x-45}{2\sqrt{x}}$$

Questa derivata è zero quando $-15x^2+60x-45=0$, cioè se $x=1$ o $x=3$

Allora aggiungo questi due x ai candidati. Calcolo il valore della funzione nei 4 candidati

$f\left(\frac{1}{2}\right) \approx -25,2$ $\quad f(1) = -28$ $\quad f(3) \approx -20,7$ $\quad f(4) = -26$

Allora $x = 3$ è il punto di max assoluto nell'intervallo e $x = 1$ il punto di min assoluto.

3) (7 punti) Sia $f(x) = \dfrac{1-x^2}{e^{2x}}$.

Il dominio di f è $(-\infty, +\infty)$ e inoltre $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

a) Dite dove f è negativa, dove è positiva e dove si annulla;
b) Scrivete la derivata prima di f e dite dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;
c) Disegnate il grafico di f (senza tener conto della concavità).

intervalli in cui f è positiva $(-1,1)$	intervalli in cui è negativa altrove
derivata prima di f $\quad 2(x^2-x-1)/e^{2x}$	
intervalli in cui f cresce altrove	e in cui decresce $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt5}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt5}{2}\right)$
x in cui si annulla f' e valore di f in essi	$x=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt5}{2}$ $f(x)\approx 2{,}12$, $x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt5}{2}$ $f(x)\approx -0{,}064$

Svolgimento e grafico:

segno di f = segno di $1-x^2$ dato che e^{2x} è sempre positivo

$= \quad + \quad -1 \quad - \quad 1 \quad +$

$$f' = \frac{-2x\,e^{2x} - (1-x^2)\,e^{2x}\cdot 2}{(e^{2x})^2} = \frac{(-2x - 2(1-x^2))\,e^{2x}}{(e^{2x})^2} =$$

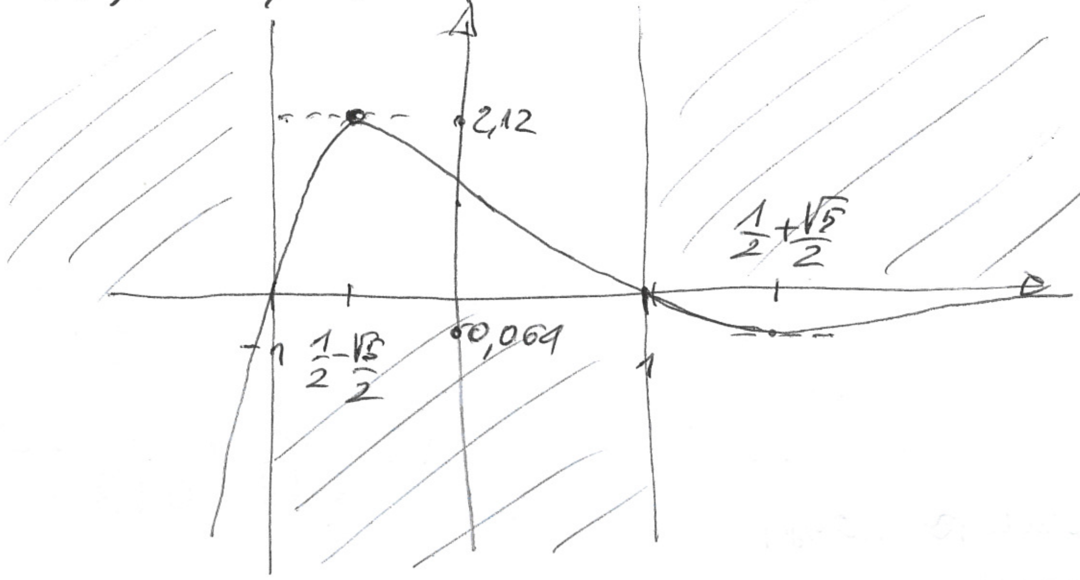
$$= 2\,\frac{x^2-x-1}{e^{2x}}$$

segno di f' = segno di x^2-x-1 $\longrightarrow$ $+ \quad \frac{1}{2}-\frac{\sqrt5}{2} \quad - \quad 0 \quad - \quad \frac{1}{2}+\frac{\sqrt5}{2} \quad +$

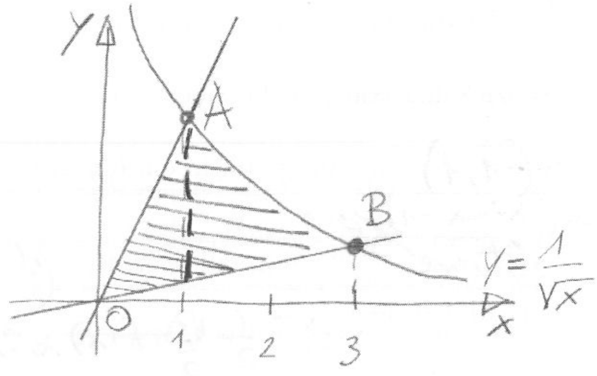
crescenza di f $\quad \nearrow \quad \searrow \quad \nearrow$

$x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt5}{2} \approx -0{,}61 \quad f(x) \approx 2{,}12$

$x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt5}{2} \approx 1{,}61 \quad f(x) \approx -0{,}064$



4) (6 punti) Nella figura sotto la curva ha equazione $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. A ha ascissa 1 e B ha ascissa 3. Calcolate l'area della regione tratteggiata in figura.



equazioni delle due rette per O e A e per O e B:
scrivete l'area tramite uno o più integrali:
valore dell'area:

Svolgimento:

$A = (1,1) \qquad B = \left(3, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

retta per O e A : $\quad y = x$

retta per O e B : $\quad y = \dfrac{x}{3\sqrt{3}}$

Spezzo l'insieme in due parti tramite la retta verticale passante per A (vedi figura)

Area della parte a sinistra $= \displaystyle\int_0^1 x - \frac{x}{3\sqrt{3}}\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) x\,dx$

$= \displaystyle\left(1 - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)\int_0^1 x\,dx = \left(1 - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) \approx 0{,}4038$

Area della parte a destra $= \displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{x}{3\sqrt{3}}\,dx = \int_1^3 x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\,x\,dx$

$= \displaystyle\left[2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6\sqrt{3}}x^2\right]_1^3 = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{1} - \frac{9}{6\sqrt{3}} + \frac{1}{6\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - 2 - \frac{8}{6\sqrt{3}} \approx 0{,}6943$

Area totale $\approx 1{,}0981$

5) (8 punti)

- Calcolate l'integrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\left(\cos x - \frac{2}{1+x^2} + 3\right)\, dx$
- Calcolate un valore approssimato dell'integrale $\int_{0.2}^{1.4} 3\ln x\, dx$ tramite il metodo di Simpson con $n = 4$.
- La funzione $3(x\ln x - x)$ è una primitiva di $3\ln x$. Calcolate il valore esatto dell'integrale sopra.

Integrale ~~che esprime la lunghezza~~ del primo punto
Valore approssimato ottenuto per il secondo integrale

Svolgimento:

$$① \int_0^{\pi/4} 2\cos x - \frac{4}{1+x^2} + 6\, dx = +2\,\text{sen}\,x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - 4\arctan x\Big]_0^{\pi/4} + 6x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 2\,\text{sen}\frac{\pi}{4} - 2\,\text{sen}\,0 - 4\arctan\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4\arctan 0 + \frac{6\pi}{4} - 6\cdot 0$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} - 4\arctan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{2}\pi$$

②

0,2 0,5 0,8 1,1 1,4

$$\Delta x = \frac{1,4 - 0,4}{4} = 0,3$$

x	$3\ln x$
0,2	−4,8238
0,5	−2,0794
0,8	−0,6694
1,1	0,2859
1,4	1,0094

$$\int_{0,2}^{1,4} 3\ln x\, dx \approx 0,3\Big(f(0,2) + 4f(0,5) + 2f(0,8) + 4f(1,1) + f(1,4)\Big)$$

$$= \frac{0,3}{3}\Big(3\ln(0,2) + 4\cdot 3\ln(0,5) + 2\cdot 3\ln(0,8) + 4\cdot 3\ln(1,1) + 3\ln(1,4)\Big) = -\frac{3,6981}{3} = -1,2372$$

$$③ \int_{0,2}^{1,4} 3\ln x\, dx = \Big[3(x\cdot\ln(x) - x)\Big]_{0,2}^{1,4} = 3\big((1,4)\ln(1,4) - (1,4)\big) - 3\big((0,2)\ln(0,2) - (0,2)\big)$$

$$= -1,221153$$