Nome e cognome:

Scritto di Matematica per cdl in Alimentari e Viticoltura ed Enologia
Prova scritta (9 o 12 crediti) del 18 Febbraio 2015

Domande brevi (7 punti)

1a) Dire se $x \sin x$ è primitiva di $\left(\sin x + x\,(\cos x + 1)\right)$ oppure no.

risposta — NO

perché $(x \operatorname{sen} x)' = \operatorname{sen} x + x \cdot \cos x$

1b) Calcolare la deviazione standard dei seguenti dati $\{1, 3, -1, 4, 5\}$

soluzione 2,154

$\text{media}(X) = 2{,}4$

$\text{media}(X^2) = 10{,}4$

$\text{Var}(X) = 10{,}4 - (2{,}4)^2 = 4{,}64$

$DS(X) = \sqrt{4{,}64} \approx 2{,}1540$

1c) Calcolare il coefficiente angolare della retta tangente alla curva $y = \sqrt{2x+1}$ nel punto della curva $(1, \sqrt{3})$.

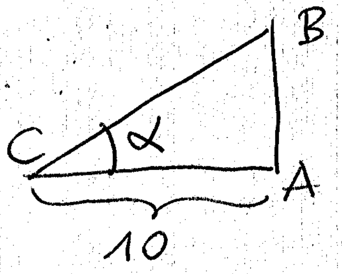
soluzione $1/\sqrt{3}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \qquad f'(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577$$

1d) Il triangolo di vertici A, B, C è rettangolo in A. La misura dell'angolo $A\widehat{C}B$ è $0{,}9$ radianti e la lunghezza del cateto AC è 10. Calcolare la lunghezza dell'ipotenusa BC.

lunghezza (scriverla come numero decimale approssimato tramite la calcolatrice)



$$\cos\alpha = \frac{AC}{BC}$$

$$\Rightarrow BC = \frac{AC}{\cos\alpha} \approx \frac{10}{0{,}6216} \approx 16{,}087$$

2) (4 punti) La popolazione di una certa città all'inizio del 2008 è di 500 000 persone. Supponiamo che ogni anno la popolazione aumenti del 10%.

a) Scrivere la formula che esprime la popolazione di quella città all'inizio dell'anno $2008 + t$ (cioè t anni dopo il 2008);
b) Dire quale è la popolazione all'inizio dell'anno 2018;
c) Dire per quale valore di t la popolazione è 1 000 000 di persone.

formula:
popolazione nel 2018:
valore di t per il quale la popolazione è 1 000 000

Svolgimento:

popolazione anno $2008+t$ = popol nel $2008 \cdot \left(1+\frac{10}{100}\right)^t$

$= 500.000\ (1,1)^t$

popol. nell'anno 2018 $= 500.000 \cdot (1,1)^{10}$
$= 1.296.871,23$

$500.000\,(1,1)^t = 1.000.000$

$\Rightarrow (1,1)^t = 2$

$\Rightarrow t = \log_{1,1} 2 = \dfrac{\ln 2}{\ln 1,1} \approx 7,272$

3) (8 punti) Sia $f(x) = \dfrac{4-4x}{x(x+3)}$. Il dominio di f è $\{x \in \mathbb{R}, x \neq 0, x \neq -3\}$. I limiti sono:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to-3^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-3^+} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

a) Dire dove f è negativa, dove è positiva e dove si annulla;
b) Scrivere la derivata prima di f e dire dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;
c) Disegnare il grafico di f (senza tener conto della concavità).

intervalli in cui f è positiva $(-\infty,-3) \cup (0,1)$	intervalli in cui è negativa altrove
e x in cui f è zero $x=1$	
derivata prima di f	
intervalli in cui f cresce	e in cui decresce
x in cui si annulla f' e valore di f in essi	

Svolgimento e grafico:

		-3		0		1	
segno di $4-4x$	+		+		+		−
" di $x(x+3)$	+		−		+		+
" " f	+		−		+		−

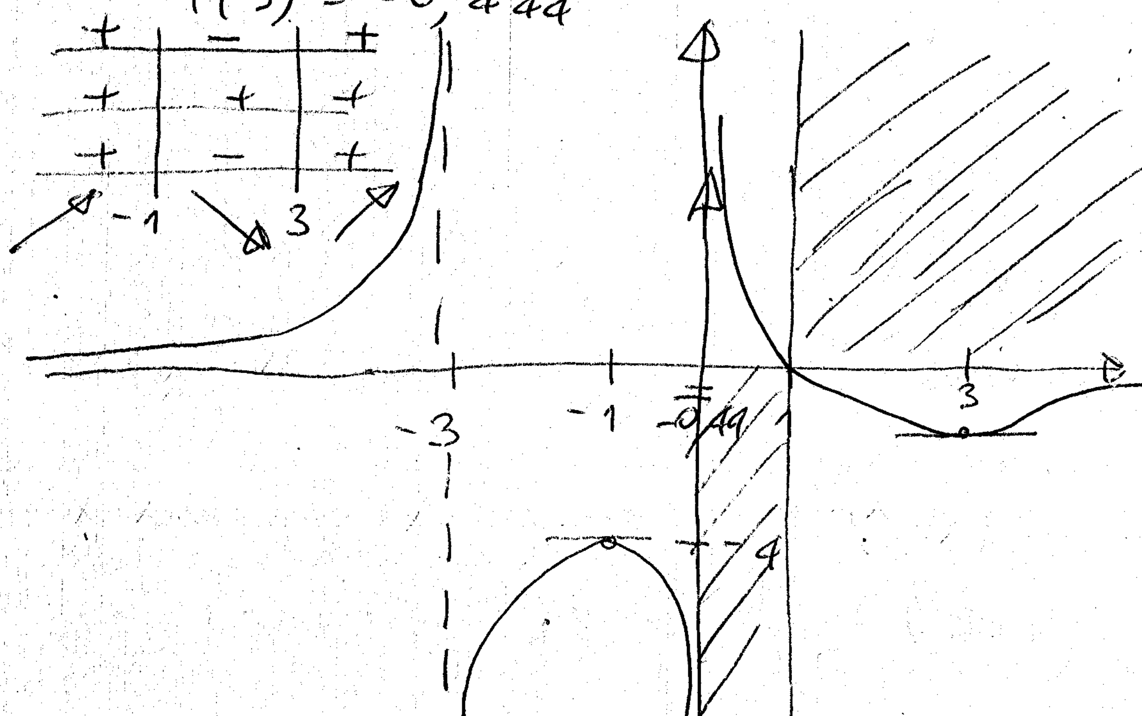
$$f' = \frac{-4(x^2+3x)-(4-4x)(2x+3)}{x^2(x+3)^2} = \frac{4(x^2-2x-3)}{x^2(x+3)^2}$$

$f' = 0$: $x=-1$, $x=3$

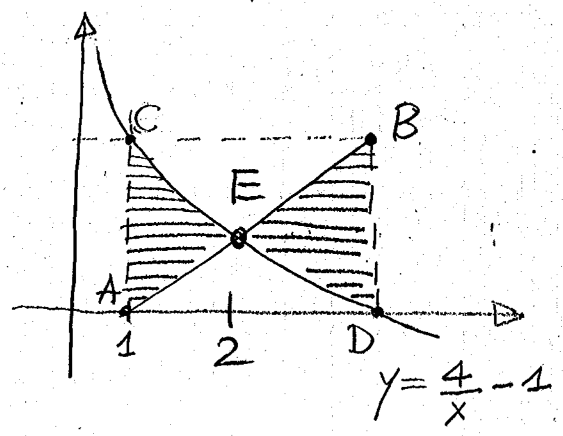
$f(-1) = -4$

$f(3) = -0,444$

		-1		3	
segno di x^2-2x-3	+		−		+
segno di $x^2(x+3)^2$	+		+		+
segno di f'	+		−		+
crescenza di f	↗		↘		↗



4) (6 punti) Calcolare l'area tratteggiata disegnata nella figura.



(Nota: A e C han la stessa coordinata x, B e C han la stessa coordinata y, B e D han la stessa coordinata x.)

coordinate dei punti A , B , C , D	
equazione della retta per A e B:	
scrivete l'area tramite uno o più integrali:	
valore dell'area:	

Svolgimento:

$A = (1,0)$ $\quad B = (1, f(1)) = (1, 3)$

D: intersezione di $y = \frac{4}{x} - 1$ con asse x $\Rightarrow x = 4$

allora $D = (4,0)$ e $B = (4,3)$

Eq. retta per A e B $\quad m = 1 \quad y = x - 1$

Mi serve anche la coordinata x del punto di intersezione tra $y = \frac{4}{x} - 1$ e la retta $y = x - 1$

$$\begin{cases} y = \frac{4}{x} - 1 \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{x} = x \Rightarrow 4 = x^2 \Rightarrow x = \pm 2$$

Allora Area $= \int_1^2 \left(\left(\frac{4}{x} - 1\right) - (x-1)\right) dx + \int_2^4 \left((x-1) - \left(\frac{4}{x} - 1\right)\right) dx$

$= \int_1^2 \left(\frac{4}{x} - x\right) dx + \int_2^4 \left(x - \frac{4}{x}\right) dx = \left[4 \ln x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 4 \ln x\right]_2^4$

$= \left(4 \ln(2) - \frac{3}{2}\right) + 6 - 4 \ln 4 + 4 \ln 2 = \frac{9}{2}$

5) (8 punti) Calcolate $\int_1^3 x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})+\sqrt{2}\,dx$.

a) Calcolatene il valore esatto tramite il metodo delle primitive;
b) Calcolatene un valore approssimato tramite il metodo dei punti medi con $n=6$;
c) Calcolate la differenza tra il valore esatto e il valore approssimato e confrontate questa differenza con l'errore teorico stimato dal Teorema sull'errore di approssimazione per il metodo dei punti medi.

Primitiva
Valore esatto dell'integrale

Valore approssimato ottenuto con il metodo dei punti medi
Differenza tra i due valori
Stima dell'errore teorico

Svolgimento:

Funzione $x\sqrt{x}+x\sqrt[3]{x}+\sqrt{2} = x^{3/2}+x^{4/3}+\sqrt{2}$

Primitiva $\frac{2}{5}x^{5/2}+\frac{3}{7}x^{7/3}+\sqrt{2}\,x$

Integrale $=\left[\frac{2}{5}x^{5/2}+\frac{3}{7}x^{7/3}+\sqrt{2}\,x\right]_1^3 = 13{,}798201232$

$\Delta x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\frac{7}{6}$ $\frac{9}{6}$ $\frac{11}{6}$ $\frac{13}{6}$ $\frac{15}{6}$ $\frac{17}{6}$

1 $\frac{4}{3}$ $\frac{5}{3}$ 2 $\frac{7}{3}$ $\frac{8}{3}$ 3

Integrale $\approx \frac{1}{3}\cdot\left(f\left(\frac{7}{6}\right)+f\left(\frac{9}{6}\right)+f\left(\frac{11}{6}\right)+f\left(\frac{13}{6}\right)+f\left(\frac{15}{6}\right)+f\left(\frac{17}{6}\right)\right)$

$\approx \frac{1}{3}(3{,}902539+4{,}968402+6{,}140381+7{,}407104+8{,}760082+10{,}192679)$

$\approx 13{,}79039574$

Differenza $=0{,}0078$

Diff. teorica. $f''(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}}$ In $[1,3]$ tale derivata è decrescente e positiva. Allora il valore massimo del suo valore assoluto si ha per $x=1$ dove vale $\frac{3}{4}+\frac{4}{9}=\frac{43}{36}$. Allora nel Teorema posso scegliere $K=\frac{43}{36}$. Quindi $|$Errore stimato punti medi$| \le \frac{43}{36}(3-1)^3 \ldots = 0{,}01106$

L'errore commesso nella pratica è quindi < di quello teorico stimato

Nome e cognome:

Scritto di Matematica per cdl in Alimentari e Viticoltura ed Enologia
Prova scritta (9 o 12 crediti) del 18 Febbraio 2015

Domande brevi (7 punti)

1a) Dire se $e^x \cos x$ è primitiva di $\left(e^x\left(\cos x - \sin x\right)\right)$ oppure no.

risposta

La derivata di $e^x \cos x$ è $e^x \cos x + e^x(-\mathrm{sen}\, x)$
Quindi è primitiva

1b) Calcolare la deviazione standard dei seguenti dati $\{0, -3, 1, 4, -2\}$

soluzione $2{,}4495$

media $(x) = 0$
media $(x^2) = 6$

Varianza $= 6 - 0 = 6$
DS $= 2{,}4495$

1c) Calcolare il coefficiente angolare della retta tangente alla curva $y = \ln(x^2 + 1)$ nel punto $(2, \ln 5)$.

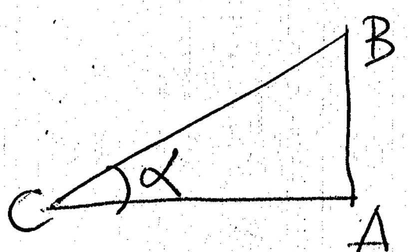
soluzione $m = 4/5$

m = derivata calcolata in $x = 2$

$f' = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x \qquad f'(2) = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$

1d) Il triangolo di vertici A, B, C è rettangolo in A. La misura dell'angolo $A\widehat{C}B$ è $0{,}9$ radianti e la lunghezza del cateto AC è 10. Calcolare la lunghezza del cateto AB.

lunghezza (scriverla come numero decimale approssimato tramite la calcolatrice)



$\tan \alpha = \frac{AB}{CA} \Rightarrow$

$AB = CA \tan \alpha$
$= 10 \cdot \tan(0{,}9)$
$= 10 \cdot 1{,}2602$

2) (4 punti) La popolazione di una certa città all'inizio del 2010 è di 25 000 persone. Supponiamo che ogni anno la popolazione aumenti del 20%.

a) Scrivere la formula che esprime la popolazione di quella città all'inizio dell'anno $2010 + s$ (cioè s anni dopo il 2010);
b) Dire quale è la popolazione all'inizio dell'anno 2015;
c) Dire per quale valore di s la popolazione è 150 000 persone.

formula:
popolazione nel 2015:
valore di s per il quale la popolazione è 150 000

Svolgimento:

$$\text{pop}(2010+s) = \text{pop}(2010)\cdot\left(1+\frac{20}{100}\right)^s =$$
$$= 25.000 \cdot (1,2)^s$$

$$\text{pop}(2015) = 25.000 \cdot (1,2)^5 = 62208$$

$$25.000 \cdot (1,2)^s = 150.000$$
$$\Rightarrow (1.2)^s = 6$$
$$\Rightarrow s = \log_{1.2} 6 = \frac{\ln 6}{\ln 1.2} = 9,827$$

3) (8 punti) Sia $f(x) = \dfrac{x(x-2)}{3x-9}$. Il dominio di f è $\{x \in \mathbb{R}, x \neq 3\}$. I limiti sono:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to3^-} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to3^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

a) Dire dove f è negativa, dove è positiva e dove si annulla;
b) Scrivere la derivata prima di f e dire dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;
c) Disegnare il grafico di f (senza tener conto della concavità).

intervalli in cui f è positiva	intervalli in cui è negativa
e x in cui f è zero	
derivata prima di f	
intervalli in cui f cresce	e in cui decresce
x in cui si annulla f' e valore di f in essi	

Svolgimento e grafico:

		0		2		3	
segno $x(x-2)$	+		−		+		+
segno $3x-9$	−		−		−		+
segno di f	−		+		−		+

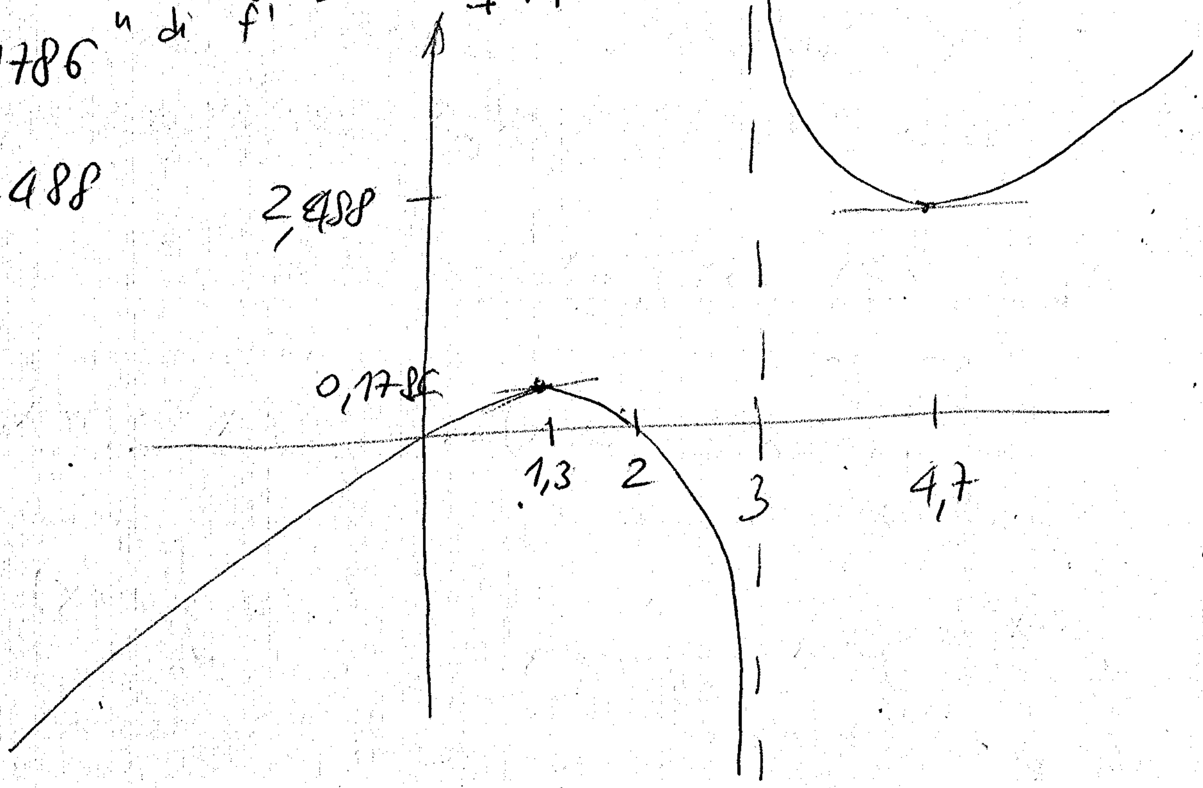
$$f' = \frac{\cancel{3}(x^2-6x+6)}{3(x-3)^2} \qquad f'=0 \quad x = 3 \pm \sqrt{3}$$

$3-\sqrt{3} \approx 1,3$ $\quad$ $3+\sqrt{3} \approx 4,7$

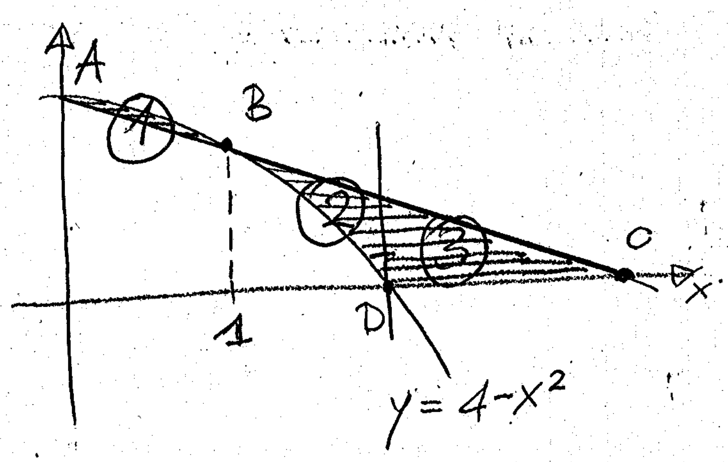
		0		$3-\sqrt{3}$		2		3		$3+\sqrt{3}$	
segno di x^2-6x+6	+		+		−		−		−		+
" di $(x-3)^2$	+		+		+		+		+		+
" di f'	+		+		−		−		−		+

$f(3-\sqrt{3}) \approx 0,1786$

$f(3+\sqrt{3}) \approx 2,488$



4) (6 punti) Calcolare l'area tratteggiata disegnata nella figura.



(Nota: Anche la parte tra la parabola e il segmento AB è inclusa.)

coordinate dei punti A	, B	, C	, D
equazione della retta per A e B:			
scrivete l'area tramite uno o più integrali:			
valore dell'area:			

Svolgimento:

$f(1) = 3 \Rightarrow y_B = 3 \Rightarrow B = (1,3)$

$A = (0, f(0)) = (0,4)$

retta per A e B $\quad m = -1 \qquad y = 4 - x$

C: x_C = intersezione tra retta e asse x $= 4$

$C = (4,0) \qquad D = (2,0)$

Area = (1) + (2) + (3)

$$= \int_0^1 (4-x^2) - (4-x)\,dx + \int_1^2 (4-x) - (4-x^2)\,dx + \int_2^4 (4-x) - 0\,dx =$$

$$= \int_0^1 x - x^2\,dx + \int_1^2 x^2 - x\,dx + \int_2^4 4 - x\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 + \left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_2^4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{7}{3} - \frac{3}{2} + 2 = 3$$

5) (8 punti) Calcolate $\int_{-1}^{1} (x+\sqrt{3})(2x+4)+e\,dx$.

a) Calcolatene il valore esatto tramite il metodo delle primitive;
b) Calcolatene un valore approssimato tramite il metodo dei punti medi con $n = 6$;
c) Calcolate la differenza tra il valore esatto e il valore approssimato e confrontate questa differenza con l'errore teorico stimato dal Teorema sull'errore di approssimazione per il metodo dei punti medi.

Primitiva	
Valore esatto dell'integrale	
Valore approssimato ottenuto con il metodo dei punti medi	
Differenza tra i due valori	
Stima dell'errore teorico	

Svolgimento:

$$(x+\sqrt{3})(2x+4)+e = 2x^2 + x(2\sqrt{3}+4) + 4\sqrt{3} + e$$

$$\int_{-1}^{1} (x+\sqrt{3})(2x+4)+e\,dx = \left[\frac{2}{3}x^3 + (\sqrt{3}+2)x^2 + 4\sqrt{3}\,x + e\cdot x\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{2}{3} + \cancel{(\sqrt{3}+2)} + 4\sqrt{3} + e\right) - \left(\frac{2}{3}(-1) + \cancel{(\sqrt{3}+2)} - 4\sqrt{3} - e\right)$$

$$= \frac{4}{3} + 8\sqrt{3} + 2e \approx 20{,}626303$$

$$\Delta x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$-\frac{5}{6}$ $-\frac{3}{6}$ $-\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{5}{6}$

-1 $-\frac{2}{3}$ $-\frac{1}{3}$ 0 $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ 1

$$\int \approx \frac{1}{3}\cdot\left(f\left(-\frac{5}{6}\right) + f\left(-\frac{3}{6}\right) + f\left(-\frac{1}{6}\right) + f\left(\frac{1}{6}\right) + f\left(\frac{3}{6}\right) + f\left(\frac{5}{6}\right)\right)$$

$$\approx \frac{1}{3}\left(4{,}815 + 6{,}414 + 8{,}458 + 10{,}946 + 13{,}878 + 17{,}255\right)$$

$$\approx 20{,}589266$$

Differenza $= 0{,}037037$

COINCIDONO

Diff. Teorica:
$f'' = 4$ costante Allora posso prendere $K = 4$ nel Teorema

$$|\text{Errore stimato punti medi}| \leq \frac{K\cdot(b-a)^3}{24n^2} = \frac{4\cdot 2^3}{24\cdot 6^2} = 0{,}037037037$$