Matematica e laboratorio 6 CFU

Scritto del 20 Dicembre 2010, cdl Alimentari e Enologia

① a) scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{x+2}\right) + 1$ nel punto $(0,1)$ (2,5 punti)

b) Calcolare la derivata seconda di $\sqrt{\text{sen}(x)}$ (2,5 punti)

② Trovare il punto di massimo assoluto e quello di minimo assoluto per $(2+x)^5(3-x)^7$ nell'intervallo $[-2,3]$. (suggerimento: dopo aver calcolato la derivata non sviluppare le potenze di $2+x$ e di $3-x$, ma invece metterle in evidenza) (5,5 punti)

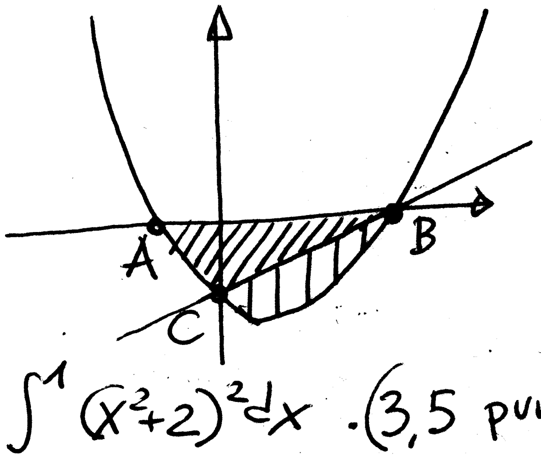
③ Sia $f(x) = x^2 - 12x + 16 \cdot \ln(x)$. Il suo dominio è $(0,+\infty)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

a) studiare la crescenza/decrescenza e quali sono i punti in cui la tangente al grafico è orizzontale

b) studiare la concavità e dire quali sono i punti di flesso ~~e le intersezioni con l'asse x~~

c) ~~senza studiare il segno di f e~~ disegnare il grafico. (8 punti)

④ Siano A e B le intersezioni della parabola $y = x^2 - x - 2$ con l'asse x e C l'intersezione della stessa parabola con l'asse y. Calcolare l'area ① (tratteggiata con linee verticali) e l'area ② (tratteggiata con linee oblique). (5,5 punti)



⑤ a) Calcolare il valore esatto di $\int_{-1}^{1} (x^2+2)^2 dx$. (3,5 punti)

b) Calcolare un valore approssimato dello stesso integrale utilizzando il metodo dei punti medi con $n=5$ (3,5 punti)

Correzione

① a) $P = (0,1)$

m: $f' = \cos\left(\frac{x}{x+2}\right) \cdot \left[\frac{1(x+2) - x \cdot 1}{(x+2)^2}\right]$

$= \cos\left(\frac{x}{x+2}\right) \cdot \frac{2}{(x+2)^2}$

$m = f'(0) = \cos(0) \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Retta per $(0,1)$ con $m = \frac{1}{2}$ $\quad y = \frac{1}{2}x + 1$

b) $(\sqrt{\operatorname{sen} x})' = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$

$(\sqrt{\operatorname{sen} x})'' = \frac{-\operatorname{sen} x \cdot 2\sqrt{\operatorname{sen} x} - \cos x \cdot 2 \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}}{4(\operatorname{sen} x)}$ (Valerolo x sen x > 0)

$= \frac{\frac{-\operatorname{sen} x \cdot 4 \cdot \operatorname{sen} x - 2\cos^2 x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}}{4 \operatorname{sen} x} =$

$= \frac{-4\operatorname{sen}^2 x - 2\cos^2 x}{8 \operatorname{sen} x \cdot \sqrt{\operatorname{sen} x}}$

---

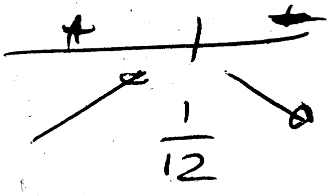
② Calcolo $f' = 5(2+x)^4 \cdot 1 \, (3-x)^7 + (2+x)^5 \cdot 7 \cdot (3-x)^6 \cdot (-1)$

$= (2+x)^4 (3-x)^6 \left[5(3-x) + (2+x) \cdot 7 \cdot (-1)\right]$

$= (2+x)^4 (3-x)^6 \left[15 - 5x - 14 - 7x\right]$

$= (2+x)^4 (3-x)^6 \left[1 - 12x\right]$

segno di f' = segno di $1-12x$ =



$x = \frac{1}{12}$ è di max assoluto

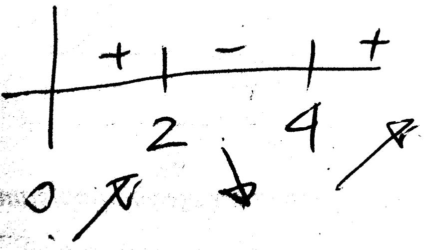
$$f\left(\frac{1}{12}\right) = \left(2+\frac{1}{12}\right)^5 \left(3-\frac{1}{12}\right)^7 = \left(\frac{25}{12}\right)^5 \cdot \left(\frac{35}{12}\right)^7 = \frac{25^5 (35)^7}{12^{12}}$$

$$= \frac{5^{10} \cdot 5^7 \cdot 7^7}{(2^2 \cdot 3)^{12}} = \frac{5^{17} \cdot 7^7}{2^{24} \cdot 3^{12}} = \dots = 70469,53426$$

(3) $f' = 2x - 12 + \frac{16}{x} = \frac{2(x^2-6x+8)}{x}$

$f' = 0 \quad x^2-6x+8=0 \quad x_{12} = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6\pm 2}{2}$ ⟨ 4, 2

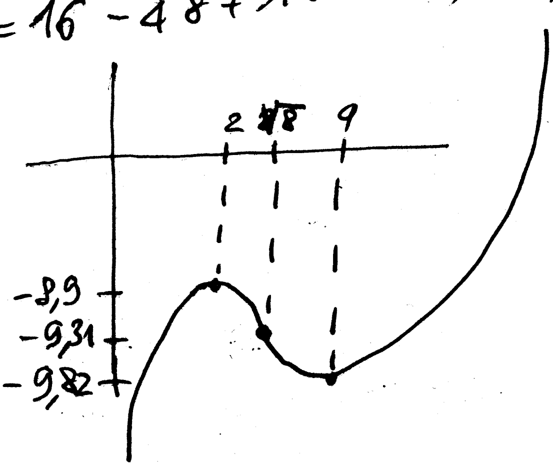
segno di f'



Valore di f nei punti critici

$f(2) = 4 - 24 + 16\ln(2) \approx -8,90$

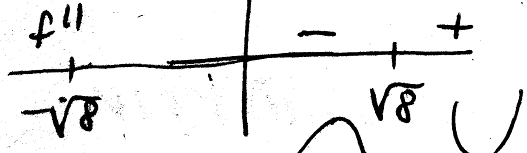
$f(4) = 16 - 48 + 16\ln(4) \approx -9,82$



$f'' = 2 - \frac{16}{x^2} = \frac{2x^2-16}{x^2}$

$f'' = 0$ se $x^2 = 8 \quad x = +\sqrt{8}$

segno di f''



Valore di f nei flessi

$$f(\sqrt{8}) = 8 - 12 \cdot \sqrt{8} + \overbrace{16\ln(\sqrt{8})}^{8\ln(8)} \approx -9,31$$

(4) Intersezione parabola con asse x

$x^2-x-2=0 \qquad x_{12} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 \\ \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$

$A=(-1,0)$, $B=(2,0)$

intersezione con asse y

$C=(0,-2)$

Eq retta per C e B $\qquad C=(0,-2) \quad B=(2,0)$

$m = \dfrac{0-(-2)}{2-0} = 1 \qquad y = x-2$

allora

$$\text{area } 1 = \int_{-1}^{0} 0-(x^2-x-2)\,dx + \int_{0}^{2} 0-(x-2)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} -x^2+x+2\,dx + \int_{0}^{2} -x+2\,dx$$

$$= -\frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big]_{-1}^{0} + 2x\Big]_{-1}^{0} + -\frac{x^2}{2}\Big]_{0}^{2} + 2x\Big]_{0}^{2}$$

$$= 0-\left(-\frac{1}{3}(-1)^3\right) + 0-\left(\frac{1}{2}\right) + 0-2(-1) + -\frac{4}{2}-0+4-0$$

$$= -\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2+2 = \frac{-2-3+12}{6}+2 = \frac{7}{6}+2$$

$$\text{area } 2 = \int_{0}^{2} (x-2)-(x^2-x-2)\,dx = \int_{0}^{2} -x^2+2x\,dx$$

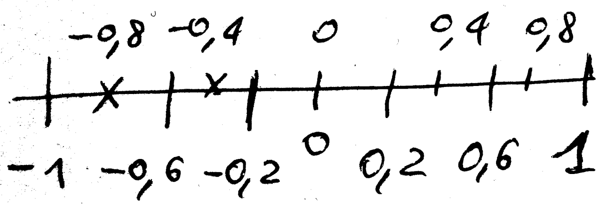
$$= -\frac{x^3}{3}+x^2\Big]_{0}^{2} = -\frac{8}{3}+4-0 = \frac{-8+12}{3} = \frac{4}{3}$$

⑤ a) $\int_{-1}^{1}(x^2+2)^2\,dx = 2\int_{0}^{1} x^4+4+4x^2\,dx$

$= 2\left[\frac{x^5}{5}+4x+\frac{4}{3}x^3\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{5}+4+\frac{4}{3}\right) =$

$= 2\,\frac{3+60+20}{15} = 2\cdot\frac{83}{15} = 11{,}0\overline{6}$

b)



$\Delta x = 0{,}4$

$\int_{-1}^{1}(x^2+2)^2\,dx \approx 0{,}4\cdot\Big(\big((-0{,}8)^2+2\big)^2+\big((-0{,}4)^2+2\big)^2+\big(0^2+2\big)^2+$
$\big((0{,}4)^2+2\big)^2+\big((0{,}8)^2+2\big)^2\Big)$

$= 0{,}4\Big((2{,}64)^2+(2{,}16)^2+2^2+(2{,}16)^2+(2{,}64)^2\Big) = 10{,}90816$