– COMPITO A

Nome: Corso di laurea: Indicare se 6 o 12 crediti:

Scritto di Matematica per cdl in Alimentari e Viticoltura ed Enologia
Prova scritta (12 crediti) del 23 Febbraio 2011

1) (4 punti) Il pedaggio pagato per percorrere un tratto autostradale dipende in modo lineare dalla lunghezza del tratto percorso. Percorrere 10 km costa 0,60 euro, mentre percorrere 100 km costa 2,40 euro.

- Scrivere la funzione che esprime il costo del pedaggio in funzione dei km;
- Dire quanti km si percorrono con 5 euro.

Svolgimento:

Costo	numero km
0,60	10
2,40	100

$$m = \frac{2{,}40 - 0{,}60}{100 - 10} = 0{,}02$$

Allora
Costo = 0,02 · numero km + 0,4

Per sapere quanti km si percorrono con 5€ si risolve l'equazione
$5 = 0{,}02 \cdot$ num km $+ 0{,}4$ e si ottiene che si percorre 230 km

2) (6 punti) Trovare il massimo e il minimo assoluto della funzione di $f(x) = (2x+4)\ e^{(\frac{1}{x})}$ nell'intervallo $[1,5]$. Scrivere anche quali sono tutti i punti critici di f.

Svolgimento:

Calcolo f' per trovare i punti critici

$$f'(x) = 2e^{\frac{1}{x}} + (2x+4)e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \left(2 - \frac{2x+4}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}} = \frac{2(x^2-x-2)}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

La derivata è 0 quando $x=-1$ e $x=2$. Questi sono i punti critici.

Nella ricerca del max e min assoluto in $[1,5]$ il punto $x=-1$ va ignorato. Allora i candidati sono $x=1$, $x=2$ e $x=5$

Calcolo i valori di f nei tre x candidati

$f(1) = 6e \approx 16{,}30$

$f(2) = 8e^{\frac{1}{2}} \approx 13{,}18$

$f(5) = 14\,e^{\frac{1}{5}} \approx 17{,}10$

Quindi $x=2$ è il punto di min assoluto, mentre $x=5$ è il punto di max assoluto

3) (8 punti) Sia

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2.$$

La funzione ha come dominio $\mathbb{R}$ e inoltre $\lim_{x\to-\infty} f = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f = +\infty$.

- Dire dove il grafico di f interseca, sta sopra o sta sotto l'asse x;
- dire dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;
- dire dove f è concava verso l'alto e dove verso il basso;
- disegnare il grafico di f.

Svolgimento:

$f(x) = \frac{x^2}{12}\cdot(3x^2 - 16x + 18)$ intersezioni asse X $X = 0$, $X = \frac{8-\sqrt{10}}{3}$ ($\approx 1,61$)

$X = \frac{8+\sqrt{10}}{3}$ ($\approx 3,72$)

Segno di f: $+$ | 0 | $+$ | $\frac{8-\sqrt{10}}{3}$ | $-$ | $\frac{8+\sqrt{10}}{3}$ | $+$

$f'(x) = x(x^2 - 4x + 3)$ f' si annulla per $x = 1$ e $x = 3$

Segno di f': $-$ | 0 | $+$ | 1 | $-$ | 3 | $+$

Crescenza di f: $\searrow$ 0 $\nearrow$ 1 $\searrow$ 3 $\nearrow$

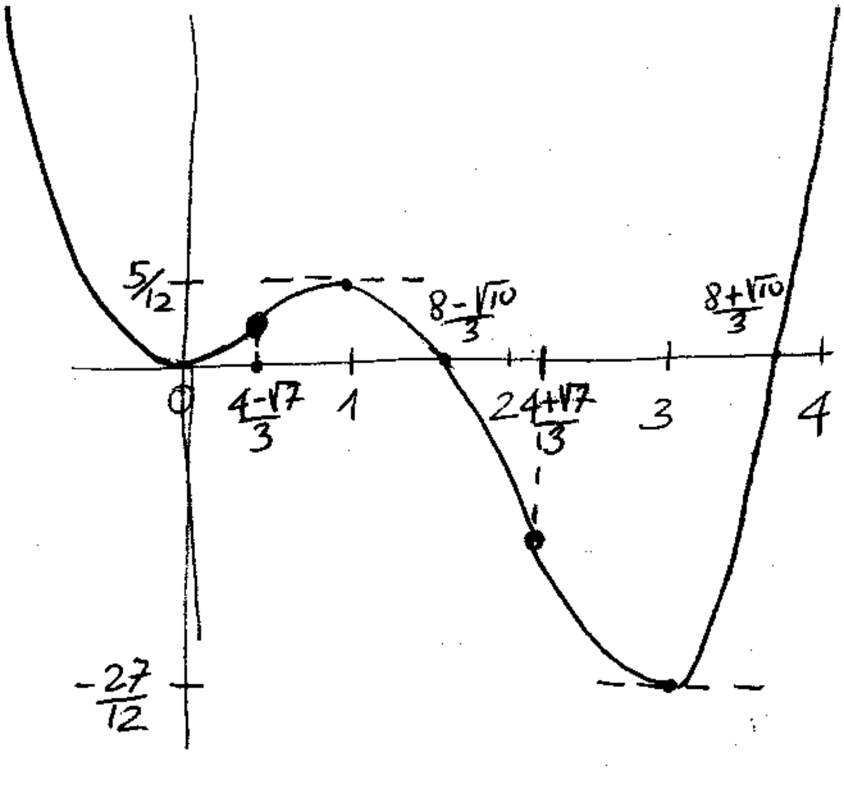
Valore di f nei punti critici $f(0) = 0$, $f(1) = \frac{5}{12}$, $f(3) = -\frac{27}{12}$

$f''(x) = 3x^2 - 8x + 3$

Segno di f'': $+$ | $\frac{4-\sqrt{7}}{3}$ | $-$ | $\frac{4+\sqrt{7}}{3}$ | $+$

Concavità di f: $\smile$ $\frac{4-\sqrt{7}}{3}$ $\frown$ $\frac{4+\sqrt{7}}{3}$ $\smile$

~~A~~ Grafico



4) **(4 punti)** Un rettangolo sta cambiando le sue dimensioni, mantenendo però il perimetro costante uguale a $20cm$. Se la base del rettangolo cresce con una velocità di $2cm/sec$ con che velocità cresce (o decresce) l'area del rettangolo quando la base è $8cm$?

Svolgimento:

Chiamiamo $b(t)$ la base e $h(t)$ l'altezza. Il problema dice che $2b(t)+2h(t)=20$. Quindi $h(t)=10-b(t)$.

L'area è $Area(t)=b(t)\cdot h(t) = b(t)\cdot(10-b(t))$

Allora $\frac{dA}{dt} = 10\frac{db}{dt} - 20b\frac{db}{dt}$

Quando $b=8$ si ha $\frac{dA}{dt} = 10\cdot 2 - 2[redacted]\cdot 8\cdot 2 = 20-32=-12$

Le unità di misura sono cm^2. Quindi l'area decresce con una velocità di $12\ cm^2/sec$

5) **(4 punti) Calcolare una approssimazione di** $\int_2^{3,2}(\sqrt{x}-2)^2\,dx$ **con il metodo del trapezio e** $n=4$.
(1 punto) Scrivete una primitiva della funzione dentro l'integrale.

Svolgimento:

1) $\int_2^{3,2}(\sqrt{x}-2)^2 dx$

$2 \quad 2,3 \quad 2,6 \quad 2,9 \quad 3,2$

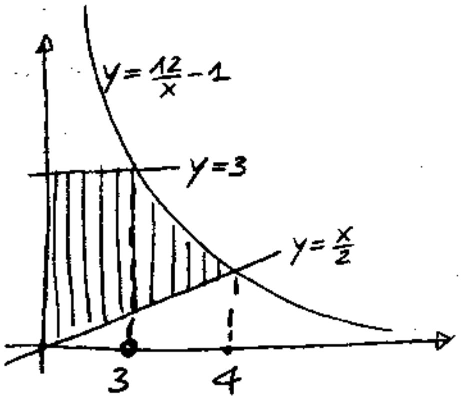
$\Delta x = 0,3$

$\approx \frac{0,3}{2}\cdot\left((\sqrt{2}-2)^2+2(\sqrt{2,3}-2)^2+2(\sqrt{2,6}-2)^2+2(\sqrt{2,9}-2)^2+(\sqrt{3,2}-2)^2\right)$

$= 0,15\cdot(0,343+2\cdot 0,233+2\cdot 0,150+2\cdot 0,088+0,44)$

2) $\int(\sqrt{x}-2)^2 dx = \int x-4\sqrt{x}-4\ dx = \frac{x^2}{2}-4\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}-4x+C$

6) (6 punti) Calcolate il valore esatto dell'area ombreggiata in figura.



Svolgimento:

Le coordinate dei punti sono scritte nel disegno

$$\text{Area} = \int_0^3 3-\frac{x}{2}\,dx + \int_3^4 \frac{12}{x}-1-\frac{x}{2}\,dx$$

$$= \left[3x-\frac{x^2}{4}\right]_0^3 + \left[12\ln x - x - \frac{x^2}{4}\right]_3^4 =$$

$$\left(9-\frac{9}{4}\right)-0+\left(12\ln 4-4-\frac{16}{4}\right)-\left(12\ln 3-3-\frac{9}{4}\right)\approx 7{,}45$$

Prova scritta (6 crediti) del 23 Febbraio 2011

Risolvere (scrivendo lo svolgimento nello spazio corrispondente del compito da 12 crediti) gli esercizi **1** (4 punti), **2** (7 punti), **3** *senza lo studio della concavità* (8 punti), **5** (7 punti) e **6** *senza la domanda sulla primitiva* (6 punti) del compito da 12 crediti.

— COMPITO B

Nome: Corso di laurea: Indicare se 6 o 12 crediti:

Scritto di Matematica per cdl in Alimentari e Viticoltura ed Enologia
Prova scritta (12 crediti) del 23 Febbraio 2011

1) (4 punti) Il prezzo del gas per riscaldamento consumato in un bimestre dipende in modo lineare dal numero dei m^3 consumati. Consumare 50 m^3 in un bimestre costa 80 euro, mentre consumare 80 m^3 costa 116 euro.

- Scrivere la funzione che esprime il costo in funzione dei m^3;
- Dire quanti m^3 si è consumato se si è speso 100 euro.

Svolgimento:

Costo GAS $= 1{,}2 \cdot$ numero $m^3 + 20$

Per sapere numero m^3 corrispondenti a spesa di 100€ risolvo equaz.

$100 = 1{,}2 \cdot$ numero $m^3 + 20$

e trovo che numero $m^3 = 66{,}\overline{6}$

2) (6 punti) Trovare il massimo e il minimo assoluto della funzione di $f(x) = x + \frac{5}{2}\ln(x^2+4)$ nell'intervallo $[-10, 1]$. Scrivere anche quali sono tutti i punti critici.

Svolgimento:

Calcolo $f' = 1 + \frac{5}{2}\frac{2x}{x^2+4} = \frac{x^2+4+5x}{x^2+4}$

Risolvo l'eq. $f'=0$ e trovo $x=-4$ e $x=-1$. Questi sono i punti critici

i candidati a max e min assoluto in $[-10,1]$ sono

$x=-10$ $f(-10) \approx 1{,}6$

$x=1$ $f(1) \approx 5{,}02$

$x=-4$ $f(-4) \approx 3{,}48$

$x=-1$ $f(-1) \approx 3{,}02$

Allora $x=-10$ è punto di min assoluto, mentre $x=1$ è punto di max assoluto.

3) (8 punti) Sia

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2.$$

La funzione ha come dominio $\mathbb{R}$ e inoltre $\lim_{x\to-\infty} f = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f = +\infty$.

- Dire dove il grafico di f interseca, sta sopra o sta sotto l'asse x;
- dire dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;
- dire dove f è concava verso l'alto e dove verso il basso;
- disegnare il grafico di f.

Svolgimento:

Intersezioni alle $x \to f=0 \to \dfrac{x^2(3x^2+4x-12)}{12} = 0$ $\begin{cases} x=0 \\ x=\dfrac{-2+2\sqrt{10}}{3} \approx 1,44 \\ x=\dfrac{-2-2\sqrt{10}}{3} \approx -2,77 \end{cases}$

segno di f: $+ \quad \dfrac{-2-2\sqrt{10}}{3} \quad - \quad 0 \quad - \quad \dfrac{-2+2\sqrt{10}}{3} \quad +$

Derivata prima $f' = x^3+x^2-2x$. Punti critici $x=0, x=-2, x=1$

Valore di f nei punti critici $f(0)=0$ $f(-2)=-\frac{32}{12}$, $f(1)=-\frac{5}{12}$

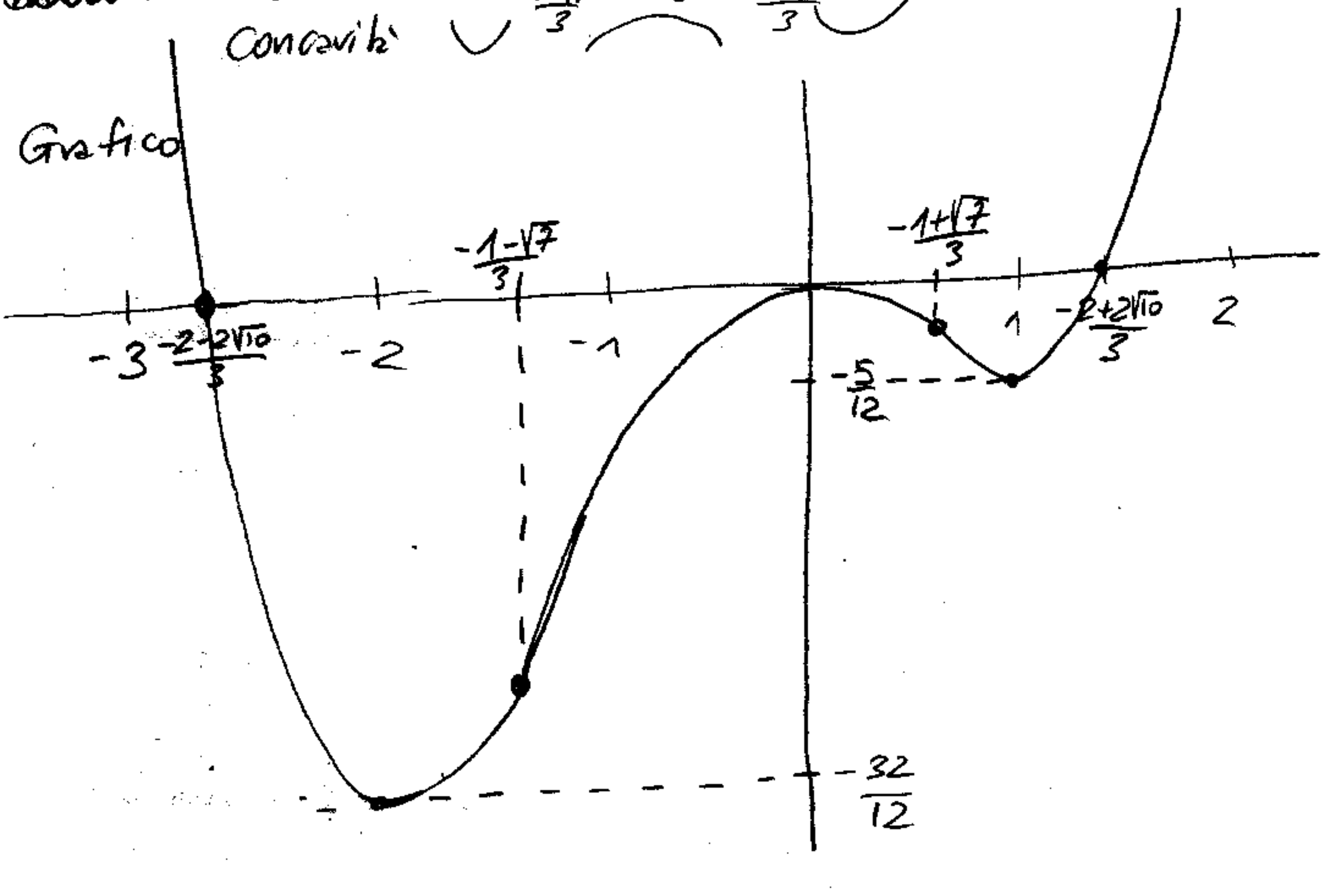
Crescenza e decrescenza: $\searrow \; -2 \; \nearrow \; 0 \; \searrow \; 1 \; \nearrow$

Derivata seconda $f''=3x^2+2x-2$ Punti di flesso $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{3}$

Segno di f'': $+ \quad \dfrac{-1-\sqrt{7}}{3} \quad - \quad 0 \quad - \quad \dfrac{-1+\sqrt{7}}{3} \quad +$

Concavità $\cup \quad \cap \quad \cup$

Grafico



4) (4 punti) Un rettangolo sta cambiando le sue dimensioni, mantenendo però l'area costante uguale a $25cm^2$. Se la base del rettangolo cresce con una velocità di $2cm/sec$ con che velocità cresce (o decresce) il perimetro del rettangolo quando la base è $8cm$?

Svolgimento:

chiamiamo $b(t)$ la base e $h(t)$ l'altezza. Poiché l'area è sempre uguale a 25 si ha che $b(t) \cdot h(t) = 25$, cioè $h(t) = \frac{25}{b(t)}$

Il perimetro è

$$P(t) = 2\,b(t) + 2\,h(t) = 2\,b(t) + \frac{50}{b(t)}$$

Allora derivando

$$\frac{dP}{dt} = 2 \cdot \frac{db}{dt} - \frac{50}{b^2(t)} \cdot \frac{db}{dt}$$

Quando $b = 8$ si ha $\frac{dP}{dt} = 2 \cdot 2 - \frac{50}{64} \cdot 2 = 2 \cdot \left(2 - \frac{50}{64}\right) = \frac{39}{16}$

Quindi il perimetro nell'istante in cui $b = 8$ cresce con una velocità di $\frac{39}{16}$ cm/sec

5) (4 punti) Calcolare una approssimazione di $\int_0^{1,6} (\sqrt{x} - 1)(2 - x)\, dx$ con il metodo del trapezio e $n = 4$.

(1 punto) Scrivete una primitiva della funzione dentro l'integrale.

Svolgimento:

a) $\Delta x = 0,4$ 0   0,4   0,8   1,2   1,6

$$\int_0^{1,6} (\sqrt{x}-1)(2-x)\,dx \approx \frac{0,4}{2} \cdot \Big[(\sqrt{0}-1)(2-0) + 2(\sqrt{0,4}-1)(2-0,4) +$$

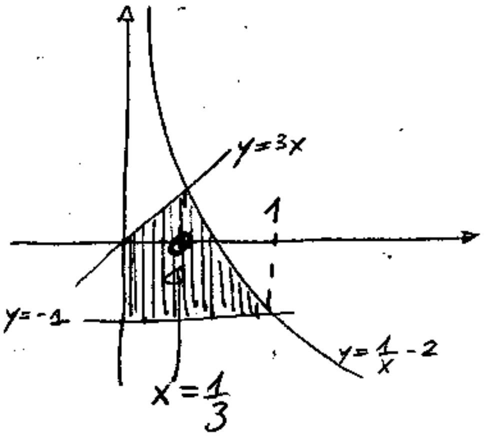
$$+ 2 \cdot (\sqrt{0,8}-1)(2-0,8) + 2(\sqrt{1,2}-1)(2-1,2) + (\sqrt{1,6}-1)(2-1,6) \Big]$$

$$= 0,2\left(-2 - 2 \cdot 0,588 - 2 \cdot 0,126 + 2 \cdot 0,076 + 0,105\right) \approx -0,634$$

b) $$\int (\sqrt{x}-1)(2-x)\,dx = \int 2\sqrt{x} - 2 - x\sqrt{x} + x\,dx =$$

$$\int 2x^{\frac{1}{2}} - 2 - x^{\frac{3}{2}} + x\,dx = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{x^2}{2} + C$$

6) **(6 punti)** Calcolate il valore esatto dell'area ombreggiata in figura.



Svolgimento:

Le coordinate necessarie sono indicate nel disegno

$$\text{Area} = \int_0^{1/3} 3x-(-1)\,dx + \int_{1/3}^{1} \frac{1}{x}-2-(-1)\,dx$$

$$= \frac{3}{2}x^2+x\Big]_0^{1/3} + \Big[\ln x - x\Big]_{1/3}^{1} = \left(\frac{3}{2}\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\right) - 0 + (\ln 1 - 1) - \left(\ln\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)$$

Prova scritta (6 crediti) del 23 Febbraio 2011

Risolvere (scrivendo lo svolgimento nello spazio corrispondente del compito da 12 crediti) gli esercizi **1** (4 punti), **2** (7 punti), **3** *senza lo studio della concavità* (8 punti), **5** (7 punti) e **6** *senza la domanda sulla primitiva* (6 punti) del compito da 12 crediti.

— COMPITO C

Nome: Corso di laurea: Indicare se 6 o 12 crediti:

Scritto di Matematica per cdl in Alimentari e Viticoltura ed Enologia
Prova scritta (12 crediti) del 23 Febbraio 2011

1) (4 punti) Il prezzo dell'energia elettrica consumata in un bimestre dipende in modo lineare dal numero dei *kw* consumati. Consumare 200 *kw* in un bimestre costa 38 euro, mentre consumare 300 *kw* costa 47 euro.

- Scrivere la funzione che esprime il costo in funzione dei *kw*;
- Dire quanto si spende se si consumano 260 *kw*.

Svolgimento: L'ipotesi della dipenza lineare fa sì che il problema possa essere trattato come quello di trovare una retta che passa per $(200,38)$ e $(300,47)$

Costo $= 0{,}09$ numero KW $+ 20$

Se si consumano 260 KW si spende

$0{,}09 \cdot 260 + 20$

cioè 43,4 euro.

2) (6 punti) Trovare il massimo e il minimo assoluto della funzione di $f(x) = (3x^2 - 9)\ e^{(x^2)}$ nell'intervallo $[-1, 7/4]$. Scrivere anche quali sono tutti i punti critici

Svolgimento:

Calcolo $f' = 6x e^{x^2} + (3x^2-9)2x e^{x^2} = 2x(3x^2-6)e^{x^2}$

Risolvo $f'=0 \longrightarrow x=0,\ x=-\sqrt{2},\ x=\sqrt{2} \leftarrow$ Punti critici

Candidati a max e min in $\left[-1, \frac{7}{4}\right]$

$x=-1 \qquad f(-1) = -6e \approx -16{,}30$

$x=\sqrt{2} \qquad f(\sqrt{2}) = -3e^2 \approx -22{,}16$

$x=\frac{7}{4} \qquad f\left(\frac{7}{4}\right) \approx 4{,}0089$

$x=0 \qquad f(0) = -9$

Allora $x=$ [redacted] è punto di min assoluto, mentre $x=\frac{7}{4}$ è punto di max assoluto.

3) **(8 punti)** Sia

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 3x^2.$$

La funzione ha come dominio $\mathbb{R}$ e inoltre $\lim_{x\to-\infty} f = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f = -\infty$.

- Dire dove il grafico di f interseca, sta sopra o sta sotto l'asse x;
- dire dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;
- dire dove f è concava verso l'alto e dove verso il basso;
- disegnare il grafico di f.

Svolgimento:

Intersezioni con asse x $\to$ $f=0 \to \dfrac{-x^2(3x^2+4x-36)}{12}=0$ $x=0$, $x=\dfrac{-2+4\sqrt7}{3}\approx$, $x=\dfrac{-2-4\sqrt7}{3}\approx -4{,}19$

Segno di f $\quad - \;\big|\; + \;\big|\; + \;\big|\; -$ $\quad \dfrac{-2-4\sqrt7}{3} \quad 0 \quad \dfrac{-2+4\sqrt7}{3}$

Calcolo f' $\quad f' = -x^3 - x^2 + 6x = -x(x^2+x-6)$

Trovo i punti critici $\quad f'=0 \to -x(x^2+x-6)=0$ $\quad x=0$, $x=-3$, $x=2$

Calcolo il valore di f nei punti critici

$f(0)=0$, $f(-3)=\dfrac{63}{4}\approx 15{,}75$, $f(2)=\dfrac{16}{3}\approx 5{,}\overline{3}$

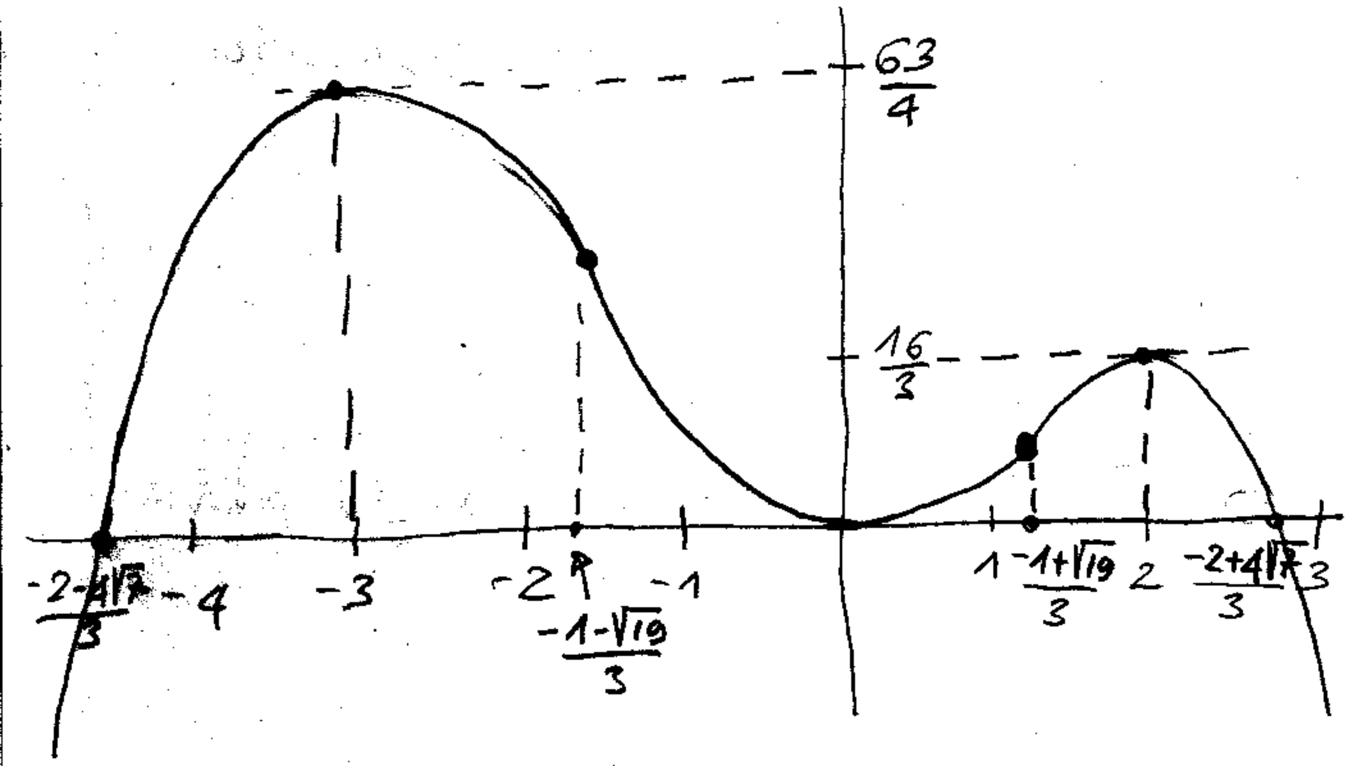
Segno di f' $\quad + \;\big|_{-3}\; - \;\big|_{0}\; + \;\big|_{2}\; -$

Crescenza di f $\quad \nearrow \;\searrow\; \nearrow \;\searrow$

Calcolo f'' $\quad f'' = -3x^2 - 2x + 6$. Punti di flesso $f''=0 \to x=$ $\dfrac{-1+\sqrt{19}}{3}\approx 1{,}11$, $\dfrac{-1-\sqrt{19}}{3}\approx -1{,}78$

Segno di f'' $\quad - \;\big|\; + \;\big|\; + \;\big|\; -$ $\quad \dfrac{-1-\sqrt{19}}{3} \quad 0 \quad \dfrac{-1+\sqrt{19}}{3}$

Concavità di f



4) (4 punti) Un rettangolo sta cambiando le sue dimensioni, mantenendo però il perimetro costante uguale a $32cm$. Se la base del rettangolo decresce con una velocità di $2cm/sec$ con che velocità cresce (o decresce) l'area del rettangolo quando la base è $10cm$?

Svolgimento:

È simile all'esercizio del compito A: vedi quel compito per la descrizione del procedimento

$A(t) = b(t) \cdot h(t)$ $\qquad P(t) = 2b(t) + 2h(t)$

$P(t) = 32 \Rightarrow 2b(t) + 2h(t) = 32 \Rightarrow h(t) = 16 - b(t)$

Quindi $A(t) = b(t) \cdot (16 - b(t)) = 16b(t) - b^2(t)$.

Derivando rispetto a t $\quad \frac{dA}{dt} = 16\frac{db}{dt} - 2b(t) \cdot \frac{db}{dt}$

Poiché $\frac{db}{dt} = 2$, quando $b = 10$ si ha

$\frac{dA}{dt} = 16 \cdot 2 - 2 \cdot 10 \cdot 2 = -8$. Quando b è 10 l'area sta decrescendo di $8\ cm^2/sec$

5) (4 punti) Calcolare una approssimazione di $\int_1^{1,8} \frac{x-2}{\sqrt{x}}\,dx$ con il metodo del trapezio e $n = 4$.
(1 punto) Scrivete una primitiva della funzione dentro l'integrale.

Svolgimento:

$$\Delta x = \frac{1,8-1}{4} = 0,2$$

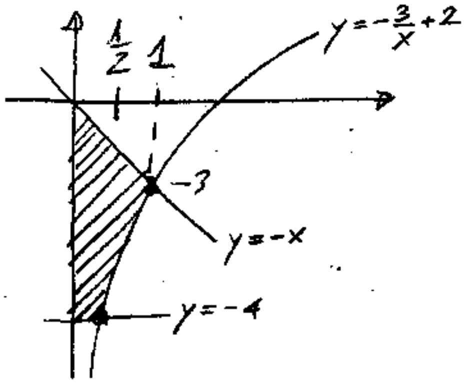
1 $\quad$ 1,2 $\quad$ 1,4 $\quad$ 1,6 $\quad$ 1,8

Allora
$$\int_1^{1,8} \frac{x-2}{\sqrt{x}}\,dx \approx \frac{\Delta x}{2}\left(\frac{1-2}{\sqrt{1}} + 2\left(\frac{1,2-2}{\sqrt{1,2}}\right) + 2\left(\frac{1,4-2}{\sqrt{1,4}}\right) + 2\left(\frac{1,6-2}{\sqrt{1,6}}\right) + \frac{1,8-2}{\sqrt{1,8}}\right) = 0,1 \cdot \left(-1 + 2 \cdot (-0,73) + 2 \cdot (-0,51) + 2 \cdot (-0,32) - 0,15\right) = -0,425$$

Primitive
$$\int \frac{x-2}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx = \int \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \int x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} - 4x^{\frac{1}{2}} + C$$

6) **(6 punti)** Calcolate il valore esatto dell'area ombreggiata in figura.



Svolgimento:

le coordinate x necessarie sono scritte sul disegno

$$\text{Area} = \int_0^{\frac{1}{2}} -x+1 \, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} -\frac{3}{x}+2+1 \, dx$$

$$= -\frac{x^2}{2}+x \Big]_0^{\frac{1}{2}} + \Big(-3\ln x + 3x \Big]_{\frac{1}{2}}^{1} = \left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\right) - 0 + \left(-3\ln 1 + 3\right)$$

$$- \left(-3\ln\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)$$

Prova scritta (6 crediti) del 23 Febbraio 2011

Risolvere (scrivendo lo svolgimento nello spazio corrispondente del compito da 12 crediti) gli esercizi **1** (4 punti), **2** (7 punti), **3** *senza lo studio della concavità* (8 punti), **5** (7 punti) e **6** *senza la domanda sulla primitiva* (6 punti) del compito da 12 crediti.