A

Nome: Corso di laurea:

Scritto di Matematica per cdl in Alimentari e Viticoltura ed Enologia
Prova scritta (12 crediti) dell'11 Febbraio 2009

1) (6 punti) Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$$3(\sin x)(\cos x)^2 + (\sin x)^3, \quad \ln\left(\frac{3x+6}{2^x}\right), \quad \sqrt[3]{x} + \frac{\tan x}{2^x}$$

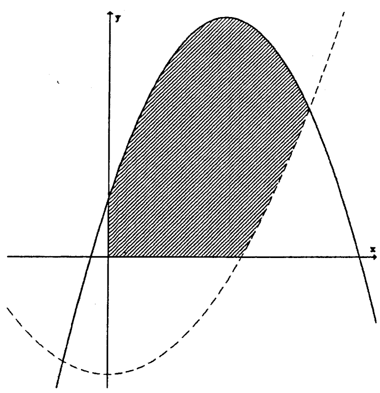
2) (5 punti) La retta mensile pagata per la frequenza di un bambino agli asili nido comunali della città di Prato è una funzione lineare del reddito ISEE della famiglia del bambino. Se tale reddito è 12000 euro la retta è 150 euro, mentre se il reddito ISEE è 22000 euro la retta è 450 euro.

- Scrivere la retta mensile (in euro) in funzione del reddito ISEE (in euro);
- Dire a quale reddito ISEE corrisponde una retta di 300 euro e quale è la retta corrispondente ad un reddito di 15000 euro.

3) (9 punti) Disegnare il grafico della funzione $\frac{(x+6)^2}{4} + 2\ln(x^2) - 10$. Indicare dominio, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti orizzontali e verticali, dove f cresce e dove decresce, dove f è concava verso l'alto e dove verso il basso. Indicare anche massimi e minimi locali e assoluti (se esistono) e l'immagine della funzione.

Nota Bene: e' molto difficile calcolare l'insieme in cui f e' positiva o negativa e non cercate di farlo. Per disegnare il grafico potete utilizzare le informazioni fornite dal programma Graph, che calcola che f e' maggiore o uguale a 0 in $(-\infty, -8.4] \cup [0.7, \infty)]$, ed e' negativa altrove.

4) (6 punti) Calcolare l'area della regione disegnata in figura. La funzione con il grafico tratteggiato è $\frac{x^2}{2} - 2$, l'altra è $1 + \frac{21}{6}x - x^2$.



5) (7 punti) Calcolare il valore esatto dell'integrale $\int_1^2 \left((3 + \frac{e^x}{\cos x}) 8 \cos x + \frac{\sqrt[4]{x}}{x} + 2\pi \right) dx$ e poi confrontarlo con il suo valore approssimato calcolato tramite la regola di Simpson, con $n = 4$.

Prova scritta (6 crediti)

Risolvere gli esercizi 1, 2, 4 e 5 precedenti (nel 5 usare il metodo del trapezio). Sostituire l'esercizio 3 precedente con il seguente:

3') (9 punti) identico al 3), ma con la funzione sostituita da $\frac{(x-3)^2}{2} + 2\ln(x) - 3$. Questa funzione e' maggiore o uguale a zero in $[3.8, \infty)$.

B

Nome: Corso di laurea:

Scritto di Matematica per cdl in Alimentari e Viticoltura ed Enologia
Prova scritta (12 crediti) dell'11 Febbraio 2009

1) (6 punti) Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$$3(\sin x)^2(\cos x) + (\cos x)^3, \quad \sqrt{\frac{3x+6}{2^x}}, \quad \sqrt[4]{x} + 10^x \tan x$$

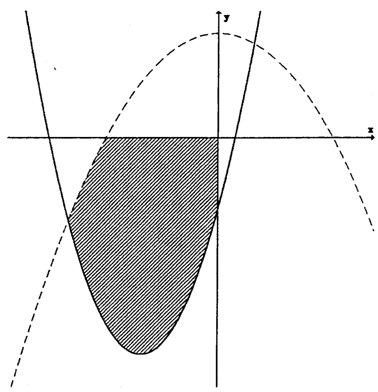
2) (5 punti) La tassa sui rifiuti per un nucleo familiare residente nella città di Prato è una funzione lineare della superficie dell'abitazione. Se la superficie è 50 mq. il costo è 80 euro, mentre se è 100 mq. il costo è 110 euro.

- Scrivere la tassa (in euro) in funzione della superficie (in mq);
- Dire a quale superficie corrisponde una tassa di 100 euro e quale è la tassa corrispondente ad una abitazione di 60 mq.

3) (9 punti) Disegnare il grafico della funzione $-\frac{(x-3)^2}{2} - \ln(x^2) + 3$. Indicare dominio, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti orizzontali e verticali, dove f cresce e dove decresce, dove f è concava verso l'alto e dove verso il basso. Indicare anche massimi e minimi locali e assoluti (se esistono) e l'immagine della funzione.

Nota Bene: e' molto difficile calcolare l'insieme in cui f e' positiva o negativa e non cercate di farlo. Per disegnare il grafico potete utilizzare le informazioni fornite dal programma Graph, che calcola che f e' maggiore o uguale a 0 in $[-0.3, 3.8]$, ed e' negativa altrove.

4) (6 punti) Calcolare l'area della regione disegnata in figura. La funzione con il grafico tratteggiato è $3 - \frac{x^2}{3}$, l'altra è $x^2 + \frac{49}{12}x - 2$.



5) (7 punti) Calcolare il valore esatto dell'integrale $\int_2^3 \left(e^x(1 + 8\frac{\sin x}{e^x}) + \frac{2\sqrt[3]{x}}{x} + 2\sqrt{2} \right) dx$ e poi confrontarlo con il suo valore approssimato calcolato tramite la regola del trapezio, con $n = 4$.

Prova scritta (6 crediti)

Risolvere gli esercizi 1, 2, 4 e 5 precedenti (nel 5 usare il metodo del trapezio). Sostituire l'esercizio 3 precedente con il seguente:

3') (9 punti) identico al 3), ma con la funzione sostituita da $\frac{(x-3)^2}{2} + 2\ln(x) - 3$. Questa funzione e' maggiore o uguale a zero in $[3.8, \infty)$.

① Ⓐ

$$\left(3 \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^3 x\right)' = 3\left(\cos x \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x \, 2 \operatorname{sen} x \cos x\right) + 3 \operatorname{sen}^2 x \cos x$$
$$= 9 \cos x \operatorname{sen}^2 x + 3 \cos x \operatorname{sen}^2 x = 12 \operatorname{sen}^2 x \cos x$$

$$\left(\ln\left(\frac{3x+6}{2^x}\right)\right)' = \frac{2^x}{3x+6} \cdot \left(\frac{3 \cdot 2^x - (3x+6) 2^x \ln 2}{2^{2x}}\right) = \frac{3-(3x+6)\ln 2}{3x+6}$$

$$\left(\sqrt[3]{x} + \frac{\tan x}{2^x}\right)' = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} + \frac{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot 2^x - \tan x \, 2^x \ln 2}{2^{2x}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{\cos x - \operatorname{sen} x \cdot \ln 2}{2^x \cdot \cos^2 x}$$

Ⓑ

$$\left(3 \operatorname{sen}^2 x \cos x + \cos^3 x\right)' = 3\left(2 \operatorname{sen} x (-\cos x) \cancel{+} \operatorname{sen}^2 x (-\cos x)\right) + 3 \cos^2 x (-\operatorname{sen} x)$$
$$= -9 \operatorname{sen} x \cos^2 x - 3 \cos x \operatorname{sen}^2 x$$

($\cos x$)

$$\left(\sqrt{\frac{3x+6}{2^x}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{3x+6}{2^x}}} \cdot \frac{3 \cdot 2^x - (3x+6) 2^x \ln 2}{2^{2x}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2^x}{3x+6}} \cdot \frac{3-(3x+6)\ln 2}{2^x}$$
$$= \frac{3-(3x+6)\ln 2}{2\sqrt{3x+6} \cdot 2^{\frac{x}{2}}}$$

$$\left(\sqrt[4]{x} + 10^x \tan x\right)' = \frac{1}{4} x^{\frac{1}{4}-1} + 10^x \ln 10 \tan x + 10^x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

---

② Ⓐ Si indichi con x il reddito ISEE e con y la retta dell'asilo
Poiché la funzione $y(x)$ è lineare il suo grafico è una retta
Inoltre tale retta passa per i due punti $(12000, 150)$ e $(22000, 450)$

Allora $y = mx + q$ con $m = \frac{450-150}{22000-12000} = \frac{3}{100}$ e $q = -210$

Quindi retta asilo $= \frac{3}{100} \cdot$ reddito ISEE $- 210$

Se reddito $= 15.000$ allora retta asilo $= \frac{3}{100} \cdot 15000 - 210 = 240$

Mentre se retta asilo $= 300$ si ha $300 = \frac{3}{100} \cdot$ reddito $- 210$,
cioè reddito $= \frac{51000}{3}$

(B) Si indichi con x la superficie e con y la tassa. Ragionando analogamente al caso (A) si ha che

$$\text{tassa} = \frac{3}{5}\,\text{superficie} + 50$$

Allora, se superficie $= 60$ si ha tassa $= \frac{3}{5}\cdot 60 + 50 = \frac{430}{5}$

Mentre se tassa $= 100$ allora $100 = \frac{3}{5}$ superficie $+ 50$
cioè superficie $= \frac{250}{3}$

---

3 (A) $\frac{(x+6)^2}{4}$ è definito qualsiasi sia x, ma $\ln(x^2)$ è definito solo se $x \neq 0$ (perché il dominio di $\ln x$ è $\{x>0\}$)
Quindi dominio funzione $= (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Calcoliamo i limiti necessari

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{(x+6)^2}{4}}_{+\infty} + \underbrace{2\ln(\underbrace{x^2}_{+\infty})}_{+\infty} - 10 = +\infty + \infty - 10 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} = +\infty \quad \text{(con ragionamenti analoghi)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{(x+6)^2}{4}}_{\frac{36}{4}} + \underbrace{2\ln(\underbrace{x^2}_{0^+})}_{-\infty} - 10 = 9 - \infty - 10 = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} = -\infty$$

$$f' = \frac{(x+6)}{2} + 2\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 2x = \frac{x+6}{2} + \frac{4}{x} = \frac{x^2+6x+8}{2x}$$

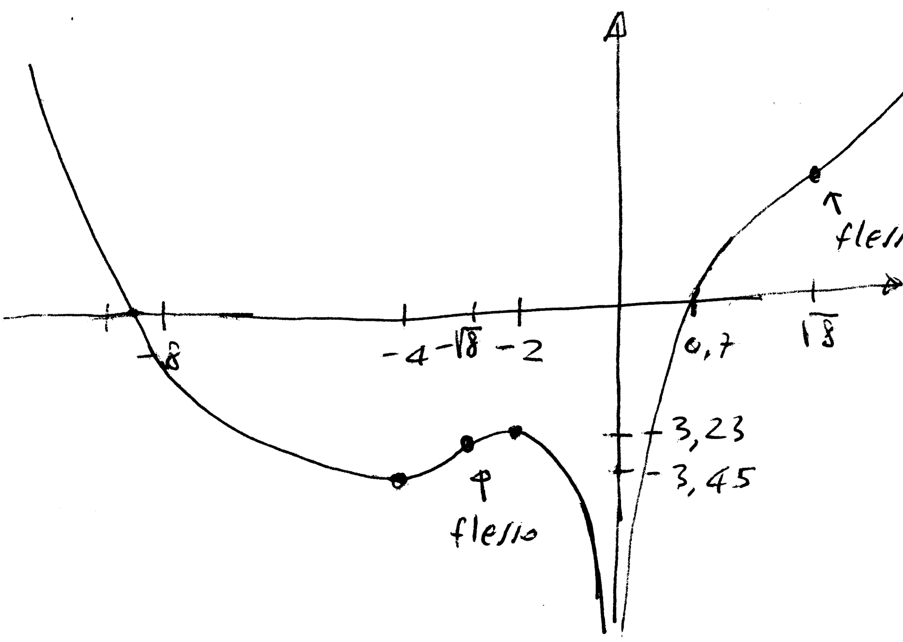
Quindi $f' = 0$ se $x=-4$ e se $x=-2$ (quando $x=0$ f' non è definita, ma, del resto, neanche f è definita) f cresce in $[-4,-2] \cup (0,+\infty)$
e decresce altrove

$f(-4) = -3{,}45$ e $f(-2) = -3{,}23$

$$f'' = \frac{x^2-8}{2x^2}$$

Quindi i punti di flesso si hanno per $x = \pm\sqrt{8}$

f è concava verso l'alto in $(-\infty, -\sqrt{8}) \cup (\sqrt{8}, +\infty)$, e concava verso il basso altrove



$x = -4$ min relativo
$x = -2$ max relativo
(non esistono max o min assoluti)
Immagine $= (-\infty, +\infty)$

Ⓑ Anche in questo caso il dominio è $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. I valori dei limiti sono

$$\lim_{x \to +\infty} = -\infty = \lim_{x \to -\infty} \qquad \lim_{x \to 0^+} = +\infty = \lim_{x \to 0^-}$$

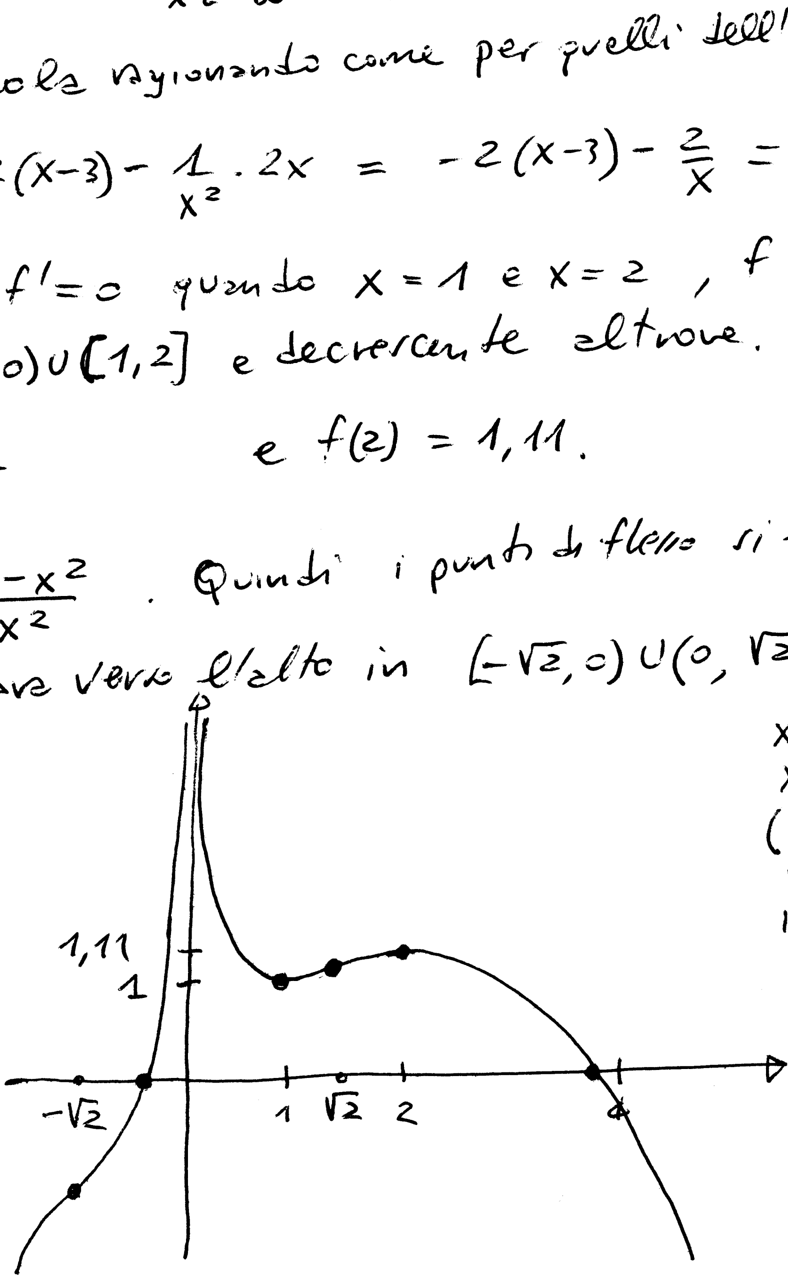
(li si calcola ragionando come per quelli dell'esercizio A)

$$f' = -2(x-3) - \frac{1}{x^2} \cdot 2x = -2(x-3) - \frac{2}{x} = \frac{-x^2 + 3x - 2}{x}$$

Quindi $f' = 0$ quando $x = 1$ e $x = 2$, f è crescente in $(-\infty, 0) \cup [1, 2]$ e decrescente altrove. Inoltre

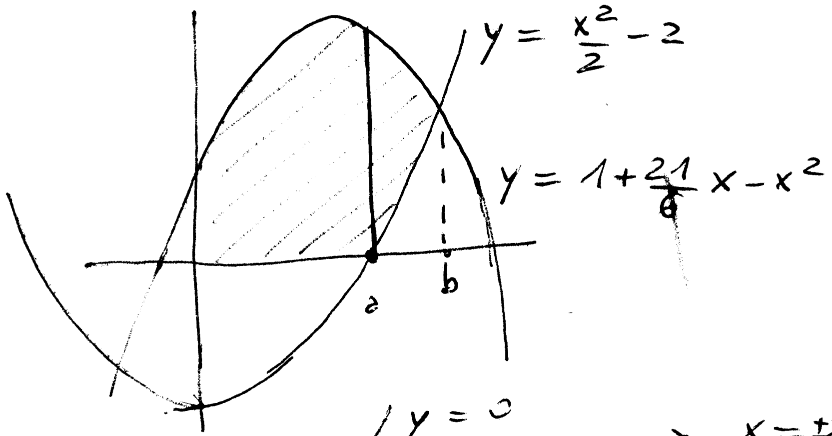
$f(1) = 1$ e $f(2) = 1,11$.

$f'' = \frac{2 - x^2}{x^2}$. Quindi i punti di flesso si hanno per $x = \pm\sqrt{2}$, f è concava verso l'alto in $[-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2}]$ e verso il basso altrove.



$x = 1$ min locale
$x = 2$ max locale
(non esistono max o min assoluti)
immagine $= (-\infty, +\infty)$

4 (A)



Determino a e b a: $\begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{x^2}{2} - 2 \end{cases} \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow a = 2$

b: $\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} - 2 \\ y = 1 + \frac{21}{6}x - x^2 \end{cases} \rightarrow \frac{3x^2 - 12}{6} = \frac{6 - 6x^2 + 21x}{6} \rightarrow \frac{3x^2 - 7x + 6}{2} = 0$

$\rightarrow x = \begin{cases} 3 \\ -\frac{2}{3} \end{cases}$

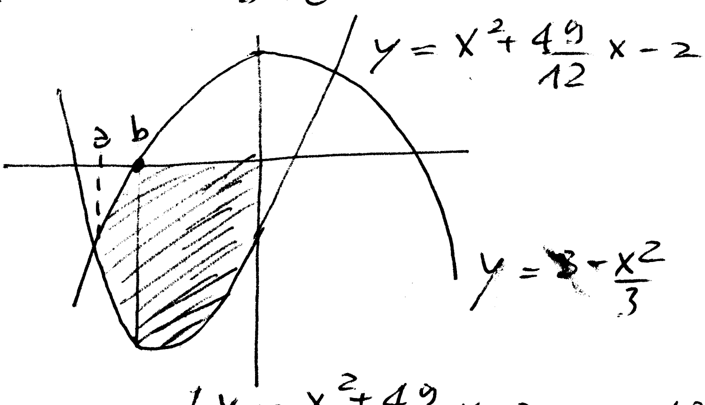
$\Rightarrow b = 3$

Allora area $= \int_0^2 \left(1 + \frac{21}{6}x - x^2\right) - (0)\, dx + \int_2^3 1 + \frac{21}{6}x - x^2 - \left(\frac{x^2}{2} - 2\right) dx$

$= \left[x + \frac{21}{12}x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \int_2^3 \left(-\frac{3}{2}x^2 + \frac{21}{6}x + 3\right) dx =$

$= \left[x + \frac{21}{12}x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left(-\frac{3}{6}x^3 + \frac{21}{12}x^2 + 3x\right]_2^3 = \dots\dots$

(B)



Determino a: $\begin{cases} y = x^2 + \frac{49}{12}x - 2 \\ y = 3 - \frac{x^2}{3} \end{cases} \longrightarrow \frac{16x^2 + 49x - 60}{12} = 0 \rightarrow x = \begin{cases} -4 \\ \frac{15}{16} \end{cases}$

$\rightarrow a = -4$. Determino b: $\begin{cases} y = 3 - \frac{x^2}{3} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = \pm 3 \rightarrow b = -3$

Allora area $= \int_{-4}^{-3} -\left(x^2 + \frac{49}{12}x - 2\right) + \left(3 - \frac{x^3}{3}\right) dx + \int_{-3}^{0} \left(0 - \left(x^2 + \frac{49}{12}x - 2\right)\right) dx$

$= \int_{-4}^{-3} -\frac{4}{3}x^2 - \frac{49}{12}x + 5\, dx + \int_{-3}^{0} -x^2 - \frac{49}{12}x + 2\, dx = \dots\dots$

⑤ Ⓐ Integrale esatto

$$\int_1^2 \left(3+\frac{e^x}{\cos x}\right)\cdot 8\cos x + \frac{\sqrt[4]{x}}{x} + 2\pi \, dx =$$

$$\int_1^2 24\cos x + 8\frac{e^x}{\cancel{\cos x}}\cdot\cancel{\cos x} + x^{\frac{1}{4}}\cdot x^{-1} + 2\pi \, dx =$$

$$\left. 24\,\mathrm{sen}x + 8e^x + \frac{x^{-\frac{3}{4}+1}}{-\frac{3}{4}+1} + (2\pi)\cdot x \right]_1^2 = \dots$$

Ⓑ Integrale esatto

$$\int_2^3 e^x + 8\frac{\mathrm{sen}x}{\cancel{e^x}}\cdot\cancel{e^x} + 2x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{-1} + 2\sqrt{2} \quad dx$$

$$= \left. e^x - 8\cos x + 2\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + (2\sqrt{2})x \right]_2^3 = \dots$$

Ⓐ Integrale approxx

1   1,25   1,5   1,75   2

$\Delta x = \frac{1}{4} = 0{,}25$

$$\text{integrale} \approx \frac{0{,}25}{3}\cdot\left(f(1) + 4f(1{,}25) + 2f(1{,}5) + 4f(1{,}75) + f(2)\right)$$

$= \dots$

Ⓑ Integrale approxx

2   2,25   2,5   2,75   3

$\Delta x = \frac{1}{4} = 0{,}25$

$$\text{integrale} = \frac{0{,}25}{2}\left(f(2) + 2f(2{,}25) + 2f(2{,}5) + 2f(2{,}75) + f(3)\right)$$

$= \dots$