/

Nome e cognome:

Scritto di Matematica per cdl in Alimentari e Viticoltura ed Enologia
Prova scritta (9 o 12 crediti) del 15 Giugno 2014

Domande brevi

1a) Scrivere un valore decimale approssimato (bastano 3 decimali) della soluzione dell'equazione $3\ (10)^x + 1 = \frac{1}{6}$.

soluzione $x =$ NON c'è soluzione

Scrivo l'equazione nella forma $10^x =$ qualcosa.

$3 \cdot 10^x = \frac{1}{6} - 1 \Rightarrow 10^x = -\frac{5}{18}$

Osservo che il numero $-5/18$ è <0. Poichè 10^x è sempre >0, qualsiasi sia x, l'equazione non ha soluzioni

1b) Calcolare la derivata seconda di $f(x) = \sqrt{x}\ \ln(x)$

soluzione

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot 2\sqrt{x} - \ln x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{4x} + \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{1}{2}-1} = \frac{\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{4x} - \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{4 - \ln x}{8x\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\frac{1}{x\sqrt{x}} =$$

1c) Scrivere l'espressione $\frac{1}{2}\ln(2) + 2\ln(3)$ come il logaritmo di un unico numero, utilizzando le proprietà dei logaritmi.

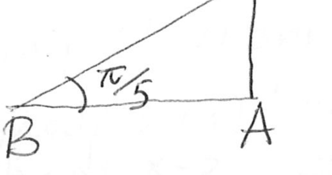
soluzione

$$\frac{1}{2} \ln(2) + 2 \ln(3) = \ln\left(2^{\frac{1}{2}}\right) + \ln\left(3^2\right) =$$

$$= \ln\left(\sqrt{2} \cdot 9\right)$$

1d) Il triangolo di vertici A, B, C è rettangolo in A. La misura dell'angolo $A\hat{B}C$ è $\pi/5$ e la lunghezza del cateto AB è 1. Calcolare la lunghezza del cateto AC.

lunghezza (scriverla come numero decimale approssimato tramite la calcolatrice)



Poichè $\tan(A\hat{B}C) = \frac{\text{lungh}(CA)}{\text{lung}(AB)}$

si ha

$\text{lungh}(AC) = \text{lung}(AB) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 \cdot 0{,}72654$

2) Considerate la tabella seguente

X	Y
3	6
3,6	4,4
4,5	-1,1

a) Calcolate la media, la varianza e la deviazione standard dei dati X;
b) Calcolate la formula per la regressione lineare dei dati Y in funzione dei dati X;
c) Calcolate il coefficiente R^2 e, sulla base di R^2, dite se possiamo ritenere che la Y dipenda dalla X in modo lineare;

media(X)= 3,7 ; varianza(X)= 0,38 ; deviazione standard(X)= $\sqrt{0,38}$	$= 0,616$
equazione retta di regressione lineare: $y = -4,84x + 21,02$	
R^2= 0,964 ; Y dipende da X in modo lineare oppure no? Sì	

Svolgimento:

	X	Y	X^2	Y^2	XY
	3	6	9	36	18
	3,6	4,4	12,96	19,36	15,84
	4,5	-1,1	20,25	1,21	-4,95
medie	3,7	3,1	14,07	18,857	9,63

$$\text{Varianza}(X) = \text{media}(X^2) - (\text{media}X)^2 = 14,07 - (3,7)^2 = 0,38$$

$$\text{Varianza}(Y) = \text{media}(Y^2) - (\text{media}Y)^2 = 18,857 - (3,1)^2 = 9,247$$

La retta di regressione lineare è $y = mx + q$ dove

$$m = \frac{\text{media}(XY) - \text{media}(X) \cdot \text{media}(Y)}{\text{varianza}(X)} = \frac{9,63 - 3,7 \cdot 3.1}{0,38} = -4,8421$$

$$q = \text{media}(Y) - m\,\text{media}(X) = 21,0157$$

La retta è quindi

$$y = -4,8421\,x + 21,0157$$

$$R^2 = \frac{(\text{media}(XY) - \text{media}(X)\,\text{media}(Y))^2}{\text{Varianza}(X)\,\text{Varianza}(Y)} = 0,964$$

Poiché $R^2 > 0,95$ possiamo credere che Y dipenda da X in modo lineare.

3) Sia $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{x^2}$

La funzione ha come dominio $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. I limiti sono:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

a) Studiare il segno di f

b) Scrivere la derivata prima di f e dire dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;

c) Trovare tutti i punti del grafico in cui la retta tangente è orizzontale e, per ognuno di tali punti, scrivere l'equazione della retta tangente.

intervalli del dominio in cui f è positiva	$(-1, +\infty)$
derivata prima di f	$(x+1)^2 \cdot (x-2) / x^3$
intervalli del dominio in cui f cresce	$(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
e in cui f decresce	$(0, 2)$
punti in cui si annulla f' e valore di f in essi	$x=-1$ $f=0$ $x=2$ $f=\frac{27}{4}$
punti del grafico con tangente orizzontale	$(-1, 0)$ e $(2, 27/4)$
equazione della tangente in tali punti	$y=0$ $y=\frac{27}{4}$

Svolgimento e grafico:

1° segno di f

		-1		0	
segno di $(x+1)^3$ = segno di $x+1$	$-$ $-$		$+$		$+$ $+$ $+$
segno di x^2	$+$ $+$		$+$		$+$ $+$ $+$
segno di f	$-$ $-$		$+$		$+$ $+$ $+$

2° Calcolo di f'. Conviene derivare $(x+1)^3$ come se fosse una derivata composta

$$((x+1)^3)' = 3(x+1)^2 \cdot \text{derivata di } (x+1) = 3(x+1)^2.$$

Allora

$$f' = \frac{3(x+1)^2 \cdot x^2 - (x+1)^3 \cdot 2x}{x^4} = \frac{x(x+1)^2\big(3x - 2(x+1)\big)}{x^4} =$$

$$= \frac{(x+1)^2(x-2)}{x^3}$$

Quindi f' si annulla quando $x=2$ e quando $x=-1$

		-1		0		2	
segno di $(x+1)^2$	$+$ $+$	0	$+$		$+$		$+$ $+$
segno di $x-2$	$-$ $-$		$-$		$-$		$+$ $+$
segno di x^3	$-$ $-$		$-$		$+$		$+$ $+$
segno di f'	$+$ $+$		$+$		$-$		$+$ $+$
crescenza di f	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

vedi altra pagina

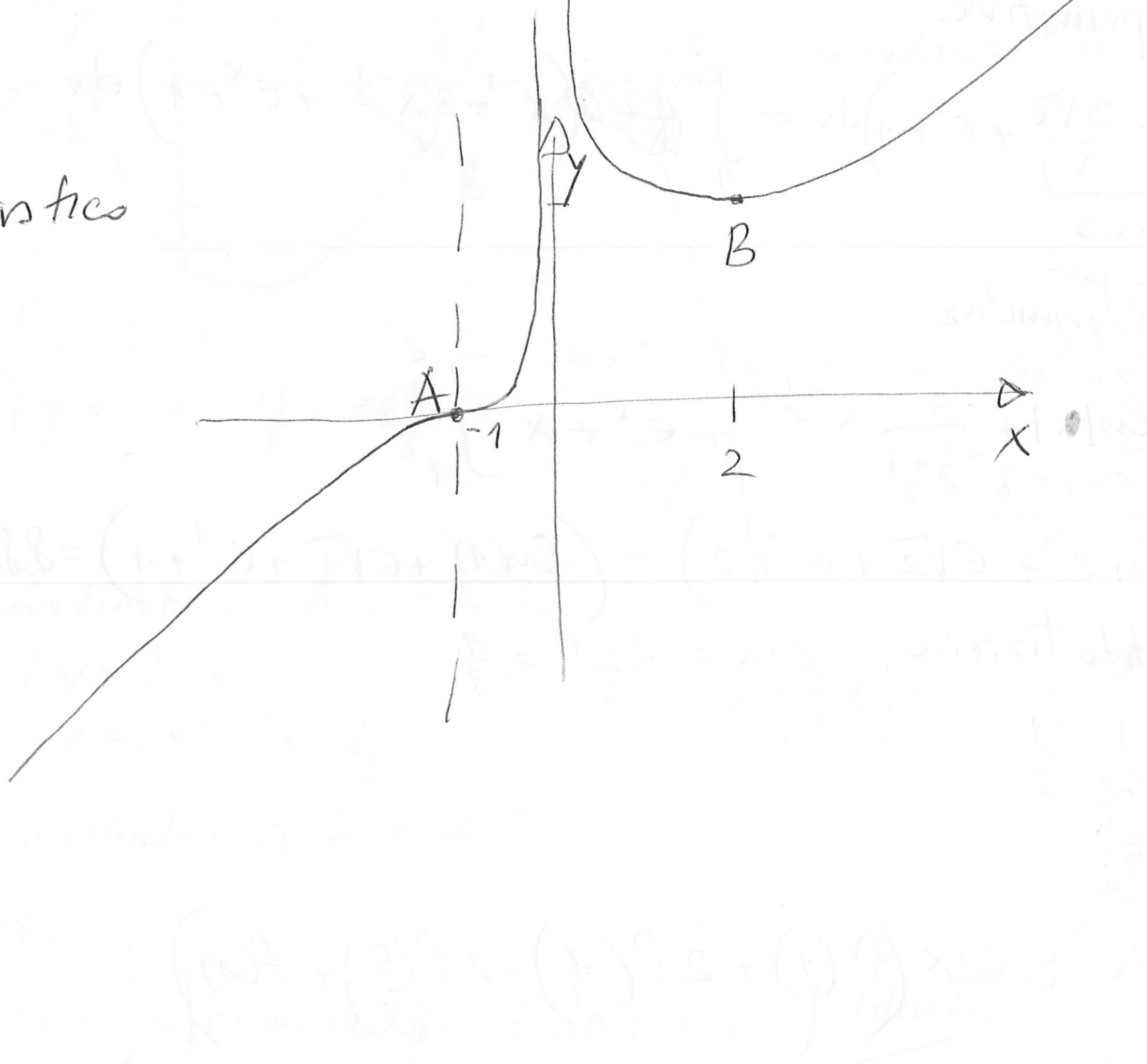
f' si annulla in $x=-1$ e $f(-1)=0$

f' si annulla in $x=2$ e $f(2)=\dfrac{3^3}{2^2}=\dfrac{27}{4}\approx 6{,}75$

L'eq. della retta tangente al grafico in
$A\equiv(-1,0)$ è $y=0$ (ricordare che $m=0$)

L'eq. della retta tangente in
$B\equiv\left(2,\dfrac{27}{4}\right)$ è $y=\dfrac{27}{4}$

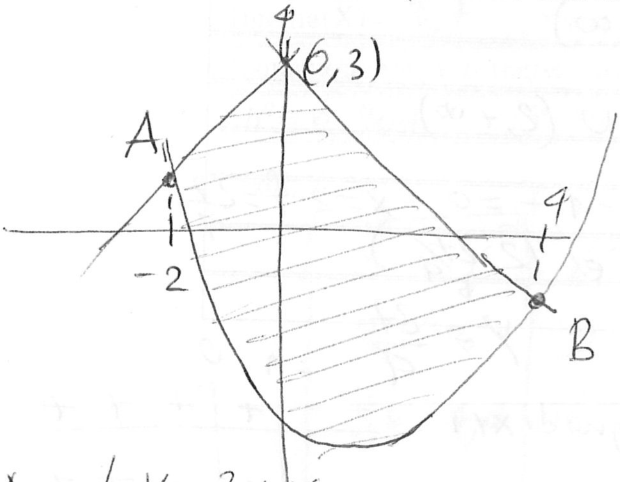
Grafico



4) Si considera la parabola $y = 2x^2 - \frac{13}{3}x - \frac{47}{3}$. Sia r la retta che passa per $(0,3)$ e ha $m = 1$, e sia l la retta che passa per $(0,3)$ e ha $m = -1$. Calcolare l'area delimitata dalle due rette e dalla parabola (vedi figura alla lavagna).

equazioni delle rette r e l:
coordinate necessarie per impostare l'integrale:
scrivere l'area come un integrale:
valore numerico dell'area

Svolgimento (e calcolo dell'integrale):



L'eq. di l è $y = 3 - x$, mentre l'eq. di r è $y = 3 + x$

Servono le coordinate di A e B

$$A: \begin{cases} y = 3 + x \\ y = 2x^2 - \frac{13}{3}x - \frac{47}{3} \end{cases} \qquad \frac{6x^2 - 16x - 56}{3} = 0 \qquad 3x^2 - 8x - 28 = 0$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{400}}{6} \quad \begin{matrix} \nearrow \frac{14}{3} \\ \searrow -2 \end{matrix}$$

La coordinata x di A è -2

$$B = \begin{cases} y = 3 - x \\ y = 2x^2 - \frac{13}{3}x - \frac{47}{3} \end{cases} \quad \dots \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{361}}{6} \quad \begin{matrix} \nearrow \frac{24}{6} = 4 \\ \searrow -\frac{14}{6} = -\frac{7}{3} \end{matrix}$$

La coordinata x di B è 4

Allora

$$= \frac{64}{3} + \frac{176}{3} = 80$$

$$\text{Area} = \int_{-2}^{0} (\text{funzione sopra} - \text{f. sotto})\,dx + \int_{0}^{4} \text{idem}$$

$$= \int_{-2}^{0} (3+x) - \left(2x^2 - \frac{13}{3}x - \frac{47}{3}\right) dx + \int_{0}^{2} (3-x) - \left(2x^2 - \frac{13}{3}x - \frac{47}{3}\right) dx$$

$$= \int_{-2}^{0} -2x^2 + \frac{16}{3}x + \frac{56}{3}\,dx + \int_{0}^{2} -2x^2 + \frac{10}{3}x + \frac{56}{3}\,dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{16}{6}x^2 + \frac{56}{3}\right]_{-2}^{0} + \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{10}{6}x^2 + \frac{56}{3}\right]_{0}^{2}$$

5) Calcolare $\int_1^2 \left(\frac{1+3\sqrt{x}}{x} + e^x + 1 \right) dx$ sia utilizzando il metodo delle primitive che utilizzando il metodo del trapezio con $n = 3$.

Calcolo tramite primitive

primitive necessarie	$\ln\lvert x\rvert + 6\sqrt{x} + e^x + x$
valore dell'integrale	8,8492

Calcolo tramite metodo del trapezio

x necessarie per il calcolo	$1,\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{3},\ 2$
valore approssimato dell'integrale	8,908
formula del trapezio applicata a questo caso particolare	

Svolgimento:

Tramite primitive

$$\int_1^2 \left(\underbrace{\frac{1}{x} + \frac{3\sqrt{x}}{x}}_{\text{spezzo la frazione per scrivere la primitiva}} + e^x + 1\right) dx = \int_1^2 \left(x^{-1} + 3x^{-\frac{1}{2}} + e^x + 1\right) dx$$

$$= \left[\ln\lvert x\rvert + \frac{3}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} + e^x + x\right]_1^2 =$$

$$= \left(\ln 2 + 6\sqrt{2} + e^2 + 2\right) - \left(\ln(1) + 6\sqrt{1} + e^1 + 1\right) = 8,8492$$

Tramite metodo trapezio $\quad \Delta x = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}$

$$1 \qquad \underbrace{1+\tfrac{1}{3}}_{\frac{4}{3}} \qquad \underbrace{1+\tfrac{2}{3}}_{5/3} \qquad 2$$

$$\int_1^2 (\ \ )\, dx \approx \frac{\Delta x}{2}\left(f(1) + 2f\left(\frac{4}{3}\right) + 2f\left(\frac{5}{3}\right) + f(2)\right)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(7,7183 + 2 \cdot 8,1417 + 2 \cdot 9,2183 + 11,01\right)$$

$$= 8,90805$$