Compito A

Nome e cognome:

Scritto di Matematica per cdl in Alimentari e Viticoltura ed Enologia
Prova scritta (9 o 12 crediti) del 27 Gennaio 2015

Domande brevi

1a) Scrivere un valore decimale approssimato (bastano 3 decimali) della soluzione dell'equazione $3\,2^x = 5$.

soluzione $x =$

$3 \cdot 2^x = 5 \Rightarrow 2^x = \frac{5}{3} \Rightarrow x = \log_2\left(\frac{5}{3}\right)$

Per usare la calcolatrice

$x = \log_2\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{\log_{10}(5/3)}{\log_{10} 2} = \frac{0,22184}{0,301029} = 0,7369$

1b) Calcolare la derivata di $f(x) = x \ln(3x+6)$ in $x = 1$

soluzione

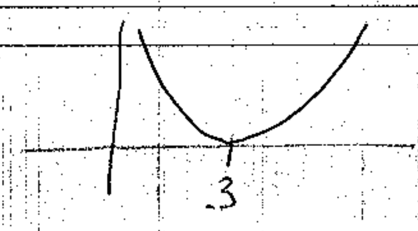
$f'(x) = 1 \cdot \ln(3x+6) + x \cdot \frac{1}{3x+6} \cdot 3 = \ln(3x+6) + \frac{3x}{3x+6}$

$f'(1) = \ln(3+6) + \frac{3}{3+6} = 2,198 + \frac{1}{3} = 2,531$

1c) Risolvere la disequazione $x^2 - 6x + 9 > 0$.

soluzione

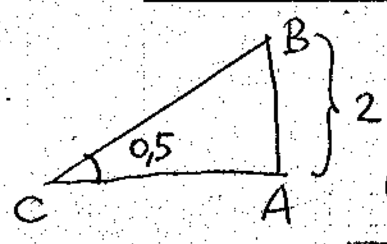
La parabola $y = x^2 - 6x + 9$ è questa



Quindi $x^2 - 6x + 9 > 0$ è vera se $x \neq 3$

1d) Il triangolo di vertici A, B, C è rettangolo in A. La misura dell'angolo $A\hat{C}B$ è $0,5$ radianti e la lunghezza del cateto AB è 2. Calcolare la lunghezza dell'ipotenusa BC.

lunghezza (scriverla come numero decimale approssimato tramite la calcolatrice)



So che $\tan 0,5 = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{2}{\overline{AC}}$

Quindi $\overline{AC} = \frac{2}{\tan(0,5)} = \frac{2}{0,5463} = 3,661$

So che $\mathrm{sen}(0,5) = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$. Quindi $\overline{BC} = \frac{\overline{AB}}{\mathrm{sen}(0,5)} = \frac{2}{0,4794} \approx 4,17$

2) Considerate la tabella seguente

X	Y
-1	7
3	20
4	30

a) Calcolate la media e la varianza dei dati Y;

b) Studiate se la Y dipende in modo lineare dalla X: calcolate la retta di regressione lineare, calcolate il coefficiente R^2 e, sulla base di R^2, dite se possiamo ritenere che la Y dipenda dalla X in modo lineare oppure no;

c) Studiate se la Y è una funzione esponenziale della X: calcolate il coefficiente R^2 corrispondente a questa interpolazione e dite se possiamo ritenere che la Y dipenda dalla X in modo esponenziale oppure no;

media(Y)= 19	; varianza(Y)= 88,667

funzione lineare

equazione retta di regressione lineare: $y = 4,214\ x + 10,571$
R^2= 0,935 ; Y dipende da X in modo lineare oppure no?

funzione esponenziale

R^2= 0,9931 ; Y dipende da X in modo esponenziale oppure no?

Svolgimento:

Vedi pagina seguente

Compito 1

	X	Y	Z:=Log y	X^2	Y^2	XY	Z^2	ZX
	-1,00	7	0,85	1	49	-7	0,714	-0,845
	3,00	20	1,30	9	400	60	1,693	3,903
	4,00	30	1,48	16	900	120	2,182	5,908
media	2,00	19,00	1,21	8,67	449,67	57,67	1,53	2,99
varianza	4,67	88,667	0,07					

$= \text{media}(X^2) - (\text{media}(X))^2$

idem

regressione lineare

m= $\dfrac{\text{media xy-media(x)media(y)}}{\text{varianza(x)}} = \dfrac{19,667}{4,667} =$ 4,214

q= media(y)-m*media(x) 10,571

CP= $\dfrac{\text{media xy-media(x)media(y)}}{\text{devstand(x)devstand(y)}} = \dfrac{19,667}{20,342} =$ 0,967

CP calcolato da ~~lui~~ CALC = 0,967

R^2= 0,935

regressione esponenziale

$Z = \text{Log } Y$

CP= $\dfrac{\text{media(xz)-media(x)media(z)}}{\text{devstand(x)devstand(z)}} = \dfrac{0,5733}{0,5753} =$ 0,9965

CP calcolato da ~~lui~~ CALC 0,9965

R^2= 0,9931

3) Sia $f(x) = e^{\left(\frac{4}{3}x\right)}\left(\frac{4}{x} - 1\right)$

a) Scrivere la derivata prima di f e dire dove f cresce e dove decresce;

b) Trovare tutti i punti in cui la derivata si annulla e per ciascuno di essi dire se è un minimo relativo, un massimo relativo oppure nessuno dei due;

c) Determinare i punti di massimo e minimo (assoluto) per f quando $x \in \left[\frac{6}{10}, 2\right]$

derivata prima di f			
intervalli del dominio in cui f cresce	$[1,3]$		
e in cui f decresce	altrove		
punti in cui si annulla f' e loro classificazione	$x=1$ min relativo, $x=3$ max relativo		
punto di minimo assoluto nell'intervallo	$x=1$	valore	$6,35$
punto di massimo assoluto nell'intervallo	$x=2$	valore	$14,39$

Svolgimento:

$$f'(x) = \frac{4}{3}e^{\frac{4}{3}x}\left(\frac{4}{x}-1\right) + e^{\frac{4}{3}x}\left(-\frac{4}{x^2}\right) = e^{\frac{4}{3}x}\left(\frac{16}{3x} - \frac{4}{3} - \frac{4}{x^2}\right)$$

$$= e^{\frac{4}{3}x}\left(\frac{-4x^2+16x-12}{3x^2}\right) = 4e^{\frac{4}{3}x}\frac{(-x^2+4x-3)}{3x^2}$$

il segno di f' coincide con il segno di $-x^2+4x-3$, perché $3x^2$ e $e^{\frac{4}{3}x}$ sono sempre positivi o nulli. Allora

segno di f' = segno di $-x^2+4x-3$ = $\quad - \; 1 \; + \; 3 \; -$

Quindi f è crescente in $[1,3]$ e decrescente altrove.

~~Si annulla~~ $\quad 1 \quad 3$

I punti critici sono $x=1$ che è un minimo relativo e $x=3$ che è un massimo relativo

~~Per~~ Cerco il max e il min in $[0,6 ; 2]$. ~~...~~ Il comportamento di f in tale intervallo è $\quad [0,6 \quad 1 \quad 2]$

Quindi il minimo è certamente $x=1$ Il valore di f in $x=1$ è $e^{\frac{4}{3}} \cdot 3 = 6,35$

Per capire quale è il punto di max devo confrontare $f(0,6) = e^{\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{10}}\left(\left(\frac{10}{6}\right)\cdot 4 - 1\right) = 12,64$

e $f(2) = e^{\frac{8}{3}}(2-1) = 14,39$.

Il max è $x=2$ e il valore max è $14,39$

4) Sia $f(x) = e^{3x} - 6x$.

a) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(1/2, f(1/2))$;
b) Trovare il punto del grafico di f in cui la retta tangente è parallela alla retta $x+y=1$;
c) Dire per quali valori del parametro m esiste una retta tangente al grafico di f che ha coefficiente angolare uguale ad m.

equazioni della retta tangente in $(1/2, f(1/2))$	
coordinate del punto con tangente parallela a $x+y=1$	$\left(\frac{1}{3}\ln\left(\frac{5}{3}\right), \frac{5}{3} - 2\ln\left(\frac{5}{3}\right)\right)$
valori di m: $m > -6$	

Svolgimento:

a) ~~Ecco la retta~~ Calcolo $f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{3/2} - 3 \approx 1{,}48$ Calcolo $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 3e^{3/2} - 6 \approx 7{,}445$
Calcolo $f'(x) = 3e^{3x} - 6$
Allora la retta cercata è quella che passa per $\left(\frac{1}{2}, e^{\frac{3}{2}} - 3\right)$
con $m = 3e^{\frac{3}{2}} - 6$

$$y - \left(e^{\frac{3}{2}} - 3\right) = \left(3e^{\frac{3}{2}} - 6\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

cioè $y = \left(3e^{\frac{3}{2}} - 6\right)x - \frac{3}{2}e^{3/2} \cancel{+3} + e^{3/2} \cancel{-3}$

$$\boxed{\begin{aligned} &y = \left(3e^{\frac{3}{2}} - 6\right)x - \frac{1}{2}e^{3/2} \\ \approx\ &y = 7{,}445x - 2{,}241 \end{aligned}}$$

b) E' il punto del grafico in cui f' è uguale all'm della retta $x+y=1$, cioè f' è uguale a -1.
Risolvo l'equazione $f'(x) = -1$
cioè $3e^{3x} - 6 = -1$ $\quad 3e^{3x} = 5 \quad e^{3x} = 5/3 \quad 3x = \ln(5/3)$

$x = \frac{1}{3} \cdot \ln\left(\frac{5}{3}\right) \approx 0{,}17$ Il corrispondente valore di y è

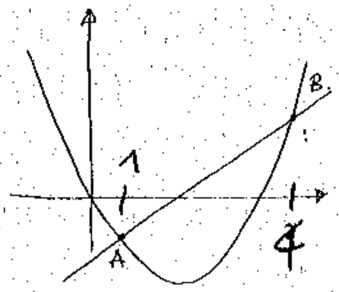
$$y = f\left(\frac{1}{3}\ln\left(\frac{5}{3}\right)\right) = e^{\ln\left(\frac{5}{3}\right)} - \frac{6}{3}\ln\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{5}{3} - 2\ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

c) Si cerca di capire per quali valori di m è possibile ripercorrere quanto fatto al punto b). ~~Ma~~ Se è possibile la retta tangente con coeff m esiste, altrimenti no. Quindi ~~se~~ l'equazione $f'(x) = m$ ha soluzione la retta esiste, altrimenti no. L'eq. è $3e^{3x} - 6 = m$ cioè $e^{3x} = \frac{m+6}{3}$
Questa eq. ha soluzione se e solo se $\frac{m+6}{3}$ è > 0, cioè $m > -6$

5) La retta $y = 2x - 4$ interseca il grafico di $g(x) = x(x-3)$ in due punti A e B.

a) Scrivere la *lunghezza* della parte del grafico di g compreso tra A e B tramite un opportuno integrale;

b) Calcolare un valore approssimato di tale integrale (quello che esprime la lunghezza) usando la regola di Simpson con $n = 6$.



coordinate x di A e di B $\quad x_A = 1 \quad x_B = 3$
integrale che esprime la lunghezza del grafico di g
coordinate x dei punti in cui si suddivide l'intervallo in Simpson
Valore approssimato dell'integrale

Svolgimento:

coordinate x di A e B : $\begin{cases} y = 2x-4 \\ y = x^2-3x \end{cases} \Rightarrow x^2-3x = 2x-4 \Rightarrow x=1,\ x=4$

$$\text{Integrale} = \int_1^4 \sqrt{1+\left((x^2-3x)'\right)^2}\,dx = \int_1^4 \sqrt{1+(2x-3)^2}\,dx$$

$$\Delta x = \frac{4-1}{6} = \frac{1}{2}$$

$1 \quad 1{,}5 \quad 2 \quad 2{,}5 \quad 3 \quad 3{,}5 \quad 4$

$$\int_1^4 \sqrt{1+(2x-3)^2}\,dx \approx \frac{\frac{1}{2}}{3}\Big(\sqrt{1+(2-3)^2}+4\sqrt{1+(3-3)^2}+2\sqrt{1+(4-3)^2}+$$

$$+4\sqrt{1+(5-3)^2}+2\sqrt{1+(6-3)^2}+4\sqrt{1+(7-3)^2}+\sqrt{1+(8-3)^2}\Big)$$

$$\approx \frac{1}{6}\Big(1{,}414+4\cdot 1+2\cdot 1{,}414+4\cdot 2{,}236+2\cdot 3{,}162+$$

$$+4\cdot 4{,}123+5{,}099\Big) \approx \frac{1}{6}\cdot 45{,}103 = 7{,}517$$

Compito B

Nome e cognome:

Scritto di Matematica per cdl in Alimentari e Viticoltura ed Enologia
Prova scritta (9 o 12 crediti) del 27 Gennaio 2015

Domande brevi

1a) Scrivere un valore decimale approssimato della soluzione dell'equazione $2\,3^x = 5$.

soluzione $x =$

$$3^x = \frac{5}{2} \quad x = \log_3\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{\log_{10}\left(\frac{5}{2}\right)}{\log_{10} 3} \approx \frac{0,398}{0,477} = 0,834$$

1b) Calcolare la derivata di $f(x) = \frac{(4x+6)^{27}}{x}$ in $x = 1$

soluzione

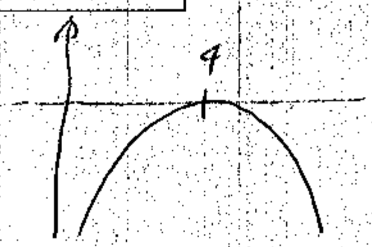
$$f'(x) = \frac{\left((4x+6)^{27}\right)' x - (4x+6)^{27}(x)'}{x^2} = \left[27(4x+6)^{26}\cdot 4x - (4x+6)^{27}\cdot 1\right] / x^2 = \frac{(4x+6)^{26}\left[108x - 4x - 6\right]}{x^2}$$

$$f'(1) = \frac{10^{26}}{1}\cdot(108-4-6) = 10^{26}\cdot 98$$

1c) Risolvere la disequazione $-x^2 + 8x - 16 \geq 0$.

soluzione

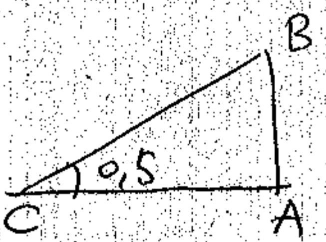
Il grafico della parabola $y = -x^2+8x+16$ è



La soluzione è quindi $x = 4$

1d) Il triangolo di vertici A, B, C è rettangolo in A. La misura dell'angolo $A\widehat{C}B$ è 0,5 radianti e la lunghezza del cateto AB è 2. Calcolare la lunghezza del cateto AC.

lunghezza (scriverla come numero decimale approssimato tramite la calcolatrice)



So che $\tan 0,5 = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{2}{\overline{AC}}$

Quindi $\overline{AC} = \frac{2}{\tan(0,5)} = \frac{2}{0,5463} = 3,661$

2) Considerate la tabella seguente

X	Y
-1	2
3	10
4	20

a) Calcolate la media e la varianza dei dati Y;
b) Studiate se la Y dipende in modo lineare dalla X: calcolate la retta di regressione lineare, calcolate il coefficiente R^2 e, sulla base di R^2, dite se possiamo ritenere che la Y dipenda dalla X in modo lineare oppure no;
c) Studiate se la Y è una funzione esponenziale della X: calcolate il coefficiente R^2 corrispondente a questa interpolazione e dite se possiamo ritenere che la Y dipenda dalla X in modo esponenziale oppure no;

media(Y)= ; varianza(Y)=

funzione lineare

equazione retta di regressione lineare:
R^2= ; Y dipende da X in modo lineare oppure no?

funzione esponenziale

R^2= ; Y dipende da X in modo esponenziale oppure no?

Svolgimento:

Vedi pagina seguente

Compito 2

	X	Y	Z:=Log y	X^2	Y^2	XY	Z^2	ZX
	-1,00	2	0,30	1	4	-2	0,091	-0,301
	3,00	10	1,00	9	100	30	1,000	3,000
	4,00	20	1,30	16	400	80	1,693	5,204
media	2,00	10,67	0,87	8,67	168,00	36,00	0,93	2,63
varianza	4,67	54,222	0,18					

= media(x²) − (media(x))²

, idem

regressione lineare

m= $\dfrac{\text{media xy-media(x)media(y)}}{\text{varianza(x)}} = \dfrac{14{,}667}{4{,}667} =$ 3,143

q= media(y)-m*media(x) 4,381

CP= $\dfrac{\text{media xy-media(x)media(y)}}{\text{devstand(x)devstand(y)}} = \dfrac{14{,}667}{15{,}907} =$ 0,922

CP calcolato da ~~Lui~~ CALC = 0,922

R^2= $(CP)^2$ = 0,850

regressione esponenziale

$Z = \text{Log } Y$

CP= $\dfrac{\text{media(xz)-media(x)media(z)}}{\text{devstand(x)devstand(z)}} = \dfrac{0{,}8997}{0{,}9049} =$ 0,9942

CP calcolato da ~~Lui~~ CALC 0,9942

R^2= 0,9885

3) Sia $f(x) = e^{\left(\frac{3}{4}x\right)}\left(1 - \frac{6}{x}\right)$

a) Scrivere la derivata prima di f e dire dove f cresce e dove decresce;
b) Trovare tutti i punti in cui la derivata si annulla e per ciascuno di essi dire se è un minimo relativo, un massimo relativo oppure nessuno dei due;
c) Determinare i punti di massimo e minimo (assoluto) per f quando $x \in [3, 6]$

derivata prima di f	
intervalli del dominio in cui f cresce	
e in cui f decresce	
punti in cui si annulla f' e loro classificazione	
punto di minimo assoluto nell'intervallo	valore
punto di massimo assoluto nell'intervallo	valore

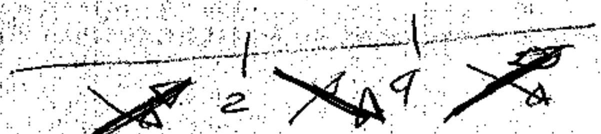
Svolgimento:

$$f'(x) = \frac{3}{4} e^{\frac{3}{4}x}\left(1 - \frac{6}{x}\right) + e^{\frac{3}{4}x}\left(\frac{6}{x^2}\right) = 3e^{\frac{3}{4}x}\left(\frac{1}{4} - \frac{6}{4x} + \frac{2}{x^2}\right)$$
$$= 3e^{\frac{3}{4}x}\left(\frac{x^2 - 6x + 8}{4x^2}\right)$$

Il segno di f' coincide con il segno di $x^2 - 6x + 8$ e quindi

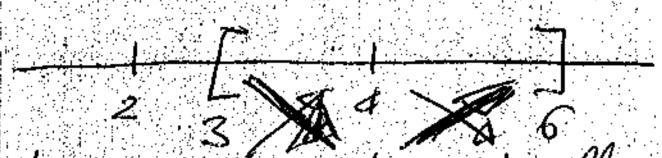
segno di f' = segno $x^2 - 6x + 8$ = $+$ | 2 | $-$ | 4 | $+$

Quindi f è decrescente in $[2, 4]$ e crescente altrove



$x = 2$ è un punto di max relativo mentre $x = 4$ è di minimo relativo.

Il comportamento di f in $[3, 6]$ è il seguente



Quindi $x = 4$ è il punto di minimo in tale intervallo. Tale valore min è uguale a $f(4) = e^3\left(1 - \frac{6}{4}\right) = -\frac{1}{2}e^3 \approx -10{,}04$

Per cercare il massimo si deve confrontare $f(3) = e^{\frac{9}{4}}\left(1 - \frac{6}{3}\right) = -e^{\frac{9}{4}}$ con $f(6) = e^{\frac{18}{4}} \cdot \left(1 - \frac{6}{6}\right) = 0$. Il punto di max è quindi $x = 6$ e il valore massimo è ~~[illegible]~~ 0

4) Sia $f(x) = e^{-x} - 6x$.

a) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(-2, f(-2))$;

b) Trovare il punto del grafico di f in cui la retta tangente è parallela alla retta $2x+y=1$;

c) Dire per quali valori del parametro m esiste una retta tangente al grafico di f che ha coefficiente angolare uguale ad m.

equazioni della retta tangente in $(-2, f(-2))$
coordinate del punto con tangente parallela a $2x+y=1$
valori di m:

Svolgimento:

a) Calcolo $f(-2) = e^2 - 6(-2) = e^2 + 12 \approx 19{,}39$

Calcolo $f'(x) = -e^{-x} - 6$ e $f'(-2) = -e^2 - 6 \approx -13{,}39$

La retta cercata è quella per $(-2; 19{,}39)$ e con $m = -13{,}39$

$y - 19{,}39 = -13{,}39(x+2)$ cioè $y = -13{,}39x - 7{,}39$

O, più precisamente, la retta per $(-2, e^2+12)$ con $m = -e^2 - 6$, cioè $y = -(e^2+6)x - e^2$

b) (vedi il compito 1 per le spiegazioni) Risolvo l'equazione

$f'(x) = -2$, cioè $-e^{-x} - 6 = -2$, cioè

$-e^{-x} = 4$ $\quad e^{-x} = -4$ Questa equazione non ha soluzione e quindi non c'è nessun punto del grafico in cui la tangente è parallela alla retta $2x+y=1$

c) Risolvo l'eq. $f'(x) = m$

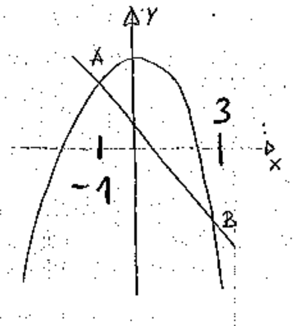
$-e^{-x} - 6 = m$ $\quad e^{-x} = -6 - m$

Questa equazione ha soluzione $\left(= -\ln(-6-m)\right)$ solo se $-6-m$ è >0, cioè se $m < -6$

5) La retta $y = 1 - 2x$ interseca il grafico di $g(x) = 4 - x^2$ in due punti A e B.

a) Scrivere la *lunghezza* della parte del grafico di g compreso tra A e B tramite un opportuno integrale;

b) Calcolare un valore approssimato di tale integrale (quello che esprime la lunghezza) usando la regola di Simpson con $n = 6$.



coordinate x di A e di B
integrale che esprime la lunghezza del grafico di g
coordinate x dei punti in cui si suddivide l'intervallo in Simpson
Valore approssimato dell'integrale

Svolgimento:

$$\begin{cases} y = 1 - 2x \\ y = 4 - x^2 \end{cases} \Longrightarrow 4 - x^2 = 1 - 2x \Rightarrow x = -1, \ x = 3$$

Allora lunghezza $= \displaystyle\int_{-1}^{3} \sqrt{1 + ((4-x^2)')^2}\, dx = \int_{-1}^{3} \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$

$$\Delta x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$-1 \quad -\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad 1 \quad \frac{5}{3} \quad \frac{7}{3} \quad 3$$

$$\int_{1}^{3} \sqrt{1+4x^2}\, dx \approx \frac{\frac{2}{3}}{3} \left(\sqrt{1 + 4(-1)^2} + 4\sqrt{1 + 4\left(\frac{1}{3}\right)^2} + 2\sqrt{1 + 4\left(\frac{1}{3}\right)^2} \right.$$

$$\left. + 4\sqrt{1 + 4 \cdot 1^2} + 2\sqrt{1 + 4 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2} + 4\sqrt{1 + 4\left(\frac{7}{3}\right)^2} + \sqrt{1 + 4\, 3^2} \right)$$

$$\approx \frac{2}{9} \left(2{,}23 + 4 \cdot 1{,}20 + 2 \cdot 1{,}20 + 4 \cdot 2{,}23 + 2 \cdot 3{,}48 + 4 \cdot 4{,}77 + 6{,}08 \right)$$

$$\approx 11{,}23$$