A

Nome: Corso di laurea: Immatricolato nell'a.a.:

Scritto di Matematica per cdl in Alimentari e Viticoltura ed Enologia
Prova scritta (12 crediti) del 2 Febbraio 2010

1) (4 punti) Dire quale è il dominio della funzione $\ln\left(x-1+\dfrac{1}{x-3}\right)$

2) Sia $f(x) = 2x\ln(x) + 2x$

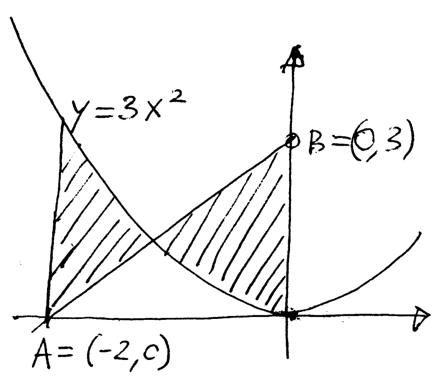
(1) (4 punti) Trovare le coordinate del punto P appartenente al grafico di f in cui la retta tangente al grafico è parallela alla retta $y - 8x + 3 = 0$.
(2) (2 punti) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f in P.

3) Sia $f(x) := \dfrac{x+6}{\sqrt{x^2+2x+2}}$. La funzione ha come dominio $\mathbb{R}$ e inoltre $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$

(1) (1 punto) dire dove il grafico di f interseca, sta sopra o sta sotto l'asse x;
(2) (3.5 punti) dire dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;
(3) (2.5 punti) disegnare (ignorando lo studio della concavità) il grafico di f.

4) (4 punti) Due persone partono dallo stesso punto. Una si muove verso EST a una velocità di 4 km/h e l'altra verso NORD a 6 km/h.
Quanto velocemente sta crescendo la loro distanza dopo 15 minuti? (la distanza tra le due persone è uguale a $\sqrt{(\text{spazio percorso da una persona})^2 + (\text{spazio percorso dall'altra persona})^2}$)

5) (6 punti) Calcolare l'area della regione tratteggiata in figura.



6) (6 punti) Calcolare un valore approssimato della lunghezza della parte del grafico di $2\sin(x)+3$ compresa tra $x=-\pi$ e $x=0$.

(1) scrivere l'integrale che esprime tale lunghezza;
(2) calcolarne una approssimazione tramite la regola *Simpson* con $n = 4$ (svolgere i calcoli fino in fondo).

Prova scritta (6 crediti)

Risolvere gli esercizi 2 (6,5 punti)), 3 (7,5 punti), 5 (7 punti). Sostituire gli esercizi 1 e 6 con i seguenti:

1') (5 punti) La funzione $g(x) := \ln((x-1)^2+4)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dire in quali intervalli g è concava verso l'alto.

6') (7 punti) Calcolare il valore esatto dell'integrale $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{3} + \pi\, dx$ e poi confrontarlo con il suo valore approssimato calcolato tramite la regola del trapezio con $n = 4$ (svolgere i calcoli fino in fondo).

B

Nome: Corso di laurea: Immatricolato nell'a.a.:

Scritto di Matematica per cdl in Alimentari e Viticoltura ed Enologia
Prova scritta (12 crediti) del 2 Febbraio 2010

1) (4 punti) Dire quale è il dominio della funzione $\sqrt{x - \dfrac{10}{x-3}}$

2) Sia $f(x) = 5x\ln(x) - 2x$

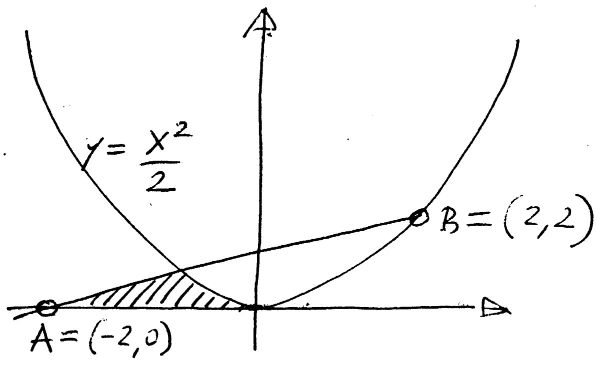
(1) (4 punti) Trovare le coordinate del punto P appartenente al grafico di f in cui la retta tangente al grafico è parallela alla retta $2y + 4x = 0$.
(2) (2 punti) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f in P.

3) Sia $f(x) = \dfrac{x^2+6}{\sqrt{x^2+1}}$. La funzione ha dominio $\mathbb{R}$ e inoltre $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

(1) (3.5 punti) dire dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;
(2) (2.5 punti) disegnare (ignorando lo studio della concavità) il grafico di f.
(3) (1 punto) dire se esistono il valore massimo e il valore minimo di f per x che varia in tutto il dominio e se si quali sono.

4) (4 punti) Due persone partono dallo stesso punto. Una si muove verso OVEST a una velocità di 4 km/h e l'altra verso SUD a 9 km/h.
Quanto velocemente sta crescendo la loro distanza dopo 20 minuti? (la distanza tra le due persone è uguale a $\sqrt{(\text{spazio percorso da una persona})^2 + (\text{spazio percorso dall'altra persona})^2}$)

5) (6 punti) Calcolare l'area della regione tratteggiata in figura.



6) (6 punti) Calcolare un valore approssimato della lunghezza della parte del grafico di $-4\sin(x)$) compresa tra $x = \pi$ e $x = 2\pi$.

(1) scrivere l'integrale che esprime tale lunghezza;
(2) calcolarne una approssimazione tramite la regola *Trapezio* con $n = 4$ (svolgere i calcoli fino in fondo).

Prova scritta (6 crediti)

Risolvere gli esercizi 2 (6,5 punti)), 3 (7,5 punti), 5 (7 punti). Sostituire gli esercizi 1 e 6 con i seguenti:

1') (5 punti) La funzione $g(x) := \ln((x-1)^2 + 4)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dire in quali intervalli g è concava verso l'alto.

6') (7 punti) Calcolare il valore esatto dell'integrale $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{3} + \pi\, dx$ e poi confrontarlo con il suo valore approssimato calcolato tramite la regola del trapezio con $n = 4$ (svolgere i calcoli fino in fondo).

C

Nome: Corso di laurea: Immatricolato nell'a.a.:

Scritto di Matematica per cdl in Alimentari e Viticoltura ed Enologia
Prova scritta (12 crediti) del 2 Febbraio 2010

1) (4 punti) Dire quale è il dominio della funzione $\ln\left(1+\dfrac{3x+9}{x^2-3x}\right)$

2) Sia $f(x)=e^{3x}+2x$

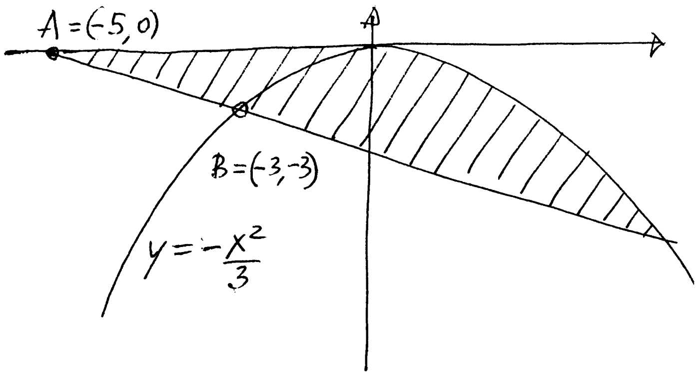
(1) (4 punti) Trovare le coordinate del punto P appartenente al grafico di f in cui la retta tangente al grafico è parallela alla retta $y-8x+5=0$.
(2) (2 punti) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f in P.

3) Sia $f(x) := \dfrac{4-x}{\sqrt{x^2-2x+2}}$. La funzione ha come dominio $\mathbb{R}$ e inoltre $\lim_{x\to\infty} f(x) = -1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$

(1) (1 punto) dire dove il grafico di f interseca, sta sopra o sta sotto l'asse x;
(2) (3.5 punti) dire dove f cresce, dove decresce e quali sono i suoi punti critici;
(3) (2.5 punti) disegnare (ignorando lo studio della concavità) il grafico di f.

4) (4 punti) Due persone partono dallo stesso punto. Una si muove verso OVEST a una velocità di 3 km/h e l'altra verso NORD a 5 km/h.
Quanto velocemente sta crescendo la loro distanza dopo 30 minuti? (la distanza tra le due persone è uguale a $\sqrt{(\text{spazio percorso da una persona})^2+(\text{spazio percorso dall'altra persona})^2}$)

5) (6 punti) Calcolare l'area della regione tratteggiata in figura.



6) (6 punti) Calcolare un valore approssimato della lunghezza della parte del grafico di $3\cos(x)-2$ compresa tra $x=-\pi/2$ e $x=\pi/2$.

(1) scrivere l'integrale che esprime tale lunghezza;
(2) calcolarne una approssimazione tramite la regola di *Simpson* con $n=4$ (svolgere i calcoli fino in fondo).

Prova scritta (6 crediti)

Risolvere gli esercizi 2 (6,5 punti)), 3 (7,5 punti), 5 (7 punti). Sostituire gli esercizi 1 e 6 con i seguenti:

1') (5 punti) La funzione $g(x) := \ln((x-1)^2+4)$ è definita per ogni $x\in\mathbb{R}$. Dire in quali intervalli g è concava verso l'alto.

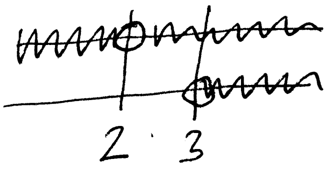
6') (7 punti) Calcolare il valore esatto dell'integrale $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{3}+\pi\,dx$ e poi confrontarlo con il suo valore approssimato calcolato tramite la regola del trapezio con $n=4$ (svolgere i calcoli fino in fondo).

Esercizio 1

(A) $\ln\left(x-1+\frac{1}{x-3}\right)$. Il suo dominio è fatto dalle x diverse da 3 e per cui $x-1+\frac{1}{x-3}>0$. Cioè $\frac{x^2-4x+4}{x-3}>0$

segno di x^2-4x+4

segno di $x-3$

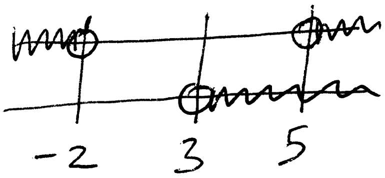


Allora il dominio è $\{x\in\mathbb{R} : x>3\}$

(B) $\sqrt{x-\frac{10}{x-3}}$. Il dominio è fatto dalle x diverse da 3 per cui $x-\frac{10}{x-3}\geq 0 \longrightarrow \frac{x^2-3x-10}{x-3}\geq 0$

segno di $x^2-3x-10$

" " $x-3$



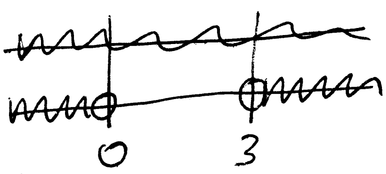
Allora il dominio è $\{x\in\mathbb{R} : -2\leq x<3\}\cup\{x\in\mathbb{R} : x\geq 5\}$

(C) $\ln\left(1+\frac{3x+9}{x^2-3x}\right)$. il suo dominio è fatto dalle x per cui $x^2-3x\neq 0$ (cioè $x\neq 0$ e $x\neq 3$) e

$$1+\frac{3x+9}{x^2-3x}>0. \longrightarrow \frac{x^2+9}{x^2-3x}>0$$

segno di x^2+9

" " x^2-3x



Allora il dominio è $(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$

Esercizio 2

(A) $f(x) = 2x\ln(x) + 2x$. "Si deve trovare il punto del grafico di f in cui la tangente ha coeff. angolare 8."
Se con il simbolo c indico la coordinata x di P, allora deve essere $f'(c) = 8$, cioè $2\ln(c)+4=8$
cioè $\ln(c) = 2$. Quindi $c = e^2$.
Calcolo adesso la coordinata y di P. Essa è $f(e^2)$, cioè $2e^2\ln(e^2)+2e^2$, cioè $6e^2$. Quindi $P = (e^2, 6e^2)$
Trovo adesso la retta tangente al grafico in P.
Di questa retta conosco già m (è 8) e devo trovare solo q.
Impongo che $y = 8x+q$ passi per P e trovo $q = -2e^2$
Allora la retta tangente in P ha equazione $y = 8x - 2e^2$

(B) Si risolve similmente. Deve essere $f'(c) = -2$
cioè $5\ln(c)+3 = -2$ cioè $\ln(c) = -1$, cioè $c = e^{-1}$
La coordinata y di P è uguale a $f(c) = f(e^{-1}) = 2e^{-1}\ln(e^{-1}) +$
$+ 2e^{-1}$, cioè 0. Quindi $P = (e^{-1}, 0)$
L'equazione della retta tangente al grafico in P è
$y = -2x + 2e^{-1}$

(C) Si risolve similmente. Deve essere $f'(c) = 8$, cioè
$3e^{3c}+2 = 8$, cioè $e^{3c} = 2$, cioè $c = \frac{1}{3}\ln(2)$.
La coordinata y di P è uguale a $f(c)$, cioè a $f(\frac{1}{3}\ln(2))$
$e^{3\cdot\frac{1}{3}\ln(2)} + \frac{2}{3}\ln(3)$ cioè $2 + \frac{2}{3}\ln(2)$. Allora $P = (\frac{1}{3}\ln(2), 2+\frac{2}{3}\ln(2))$
L'eq. della retta tangente in P è $y = 8x + 2 - 2\ln(2)$

③ Ⓐ $\dfrac{x+6}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

- il grafico di f interseca l'asse x nei valori di x che rendono f uguale a 0. Deve essere quindi $x+6=0$ cioè $x=6$
il grafico sta sopra l'asse x quando $f \geq 0$ e sotto quando $f \leq 0$.
Quindi sopra l'asse in $x \geq -6$, sotto in $x \leq -6$

- Calcolo $f' = \dfrac{1 \cdot \sqrt{x^2+2x+2} - \dfrac{(x+6)\cdot(2x+2)}{2\sqrt{x^2+2x+2}}}{x^2+2x+2} =$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)^2 - (x+6)(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+2}} \cdot \frac{1}{x^2+2x+2} =$$

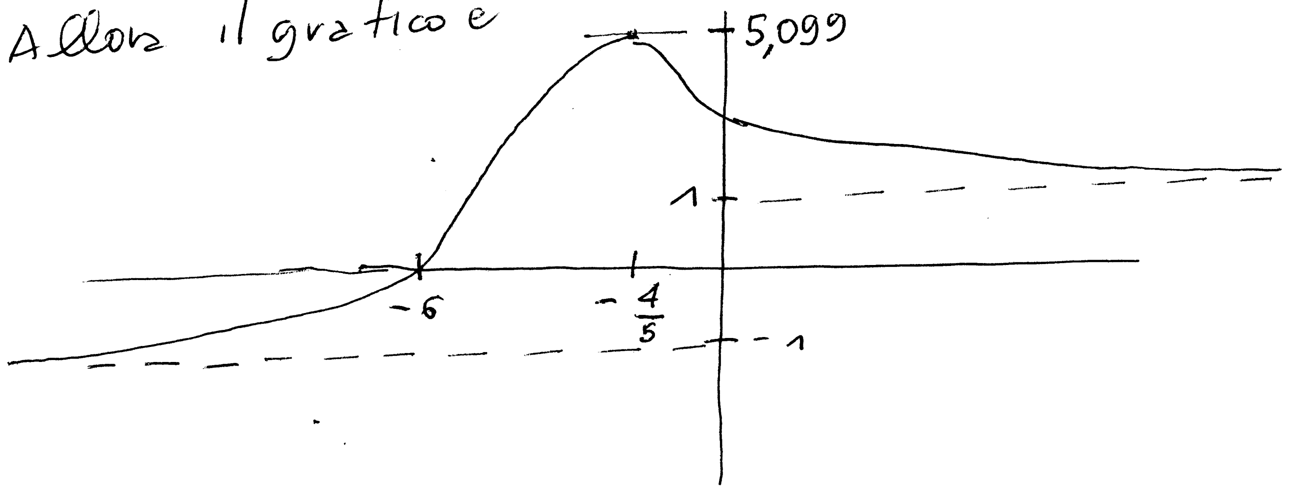
$$= \frac{x^2+2x+2 - (x^2+7x+6)}{\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)^3} = \frac{-5x-4}{\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)^3}$$

Allora $f'=0$ quando $-5x-4=0$ cioè $x=-\frac{4}{5}$
Inoltre, dato che il denominatore di f' è ≥ 0 per ogni x, risulta $f' \geq 0$ ~~p~~ se $x \leq -\frac{4}{5}$ e $f' \leq 0$ se $x \geq -\frac{4}{5}$.

$$\begin{array}{c|c} & -\frac{4}{5} \\ f' \geq 0 & f' \leq 0 \\ \hline f \text{ crescente} & f \text{ decrescente} \end{array}$$

- Per disegnare il grafico mi serve calcolare il valore di f quando $x=-\frac{4}{5}$. I calcoli danno come risultato 5,099

Allora il grafico è



(B) $f(x) = \dfrac{x^2+6}{\sqrt{x^2+1}}$

Il grafico d. f non interseca mai l'asse x e vista sempre sopra perchè $x^2+6>0$ per ogni x e $\sqrt{x^2+1}>0$ per ogni x

Calcoliamo $f'(x) = \dfrac{2x\sqrt{x^2+1} - (x^2+6)\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$

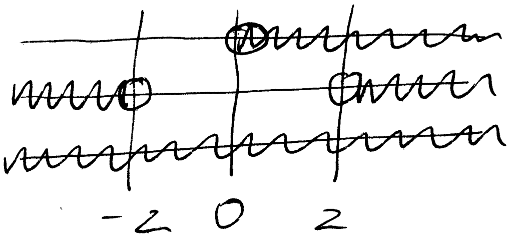
$$= \frac{2x(x^2+1)-(x^2+6)x}{(\sqrt{x^2+1})^3} = \frac{x(2x^2+2-x^2-6)}{(\sqrt{x^2+1})^3} = \frac{x(x^2-4)}{(\sqrt{x^2+1})^2}$$

Allora f' si annulla quando $x(x^2-4)=0$, cioè se $x=0$, $x=2$ e $x=-2$. Il segno di f' è dato dalla seguente tabella

segno di x

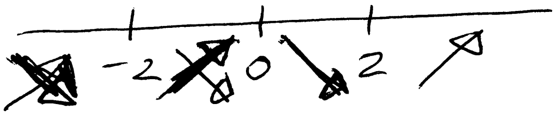
segno di x^2-4

segno di $(\sqrt{x^2+1})^3$



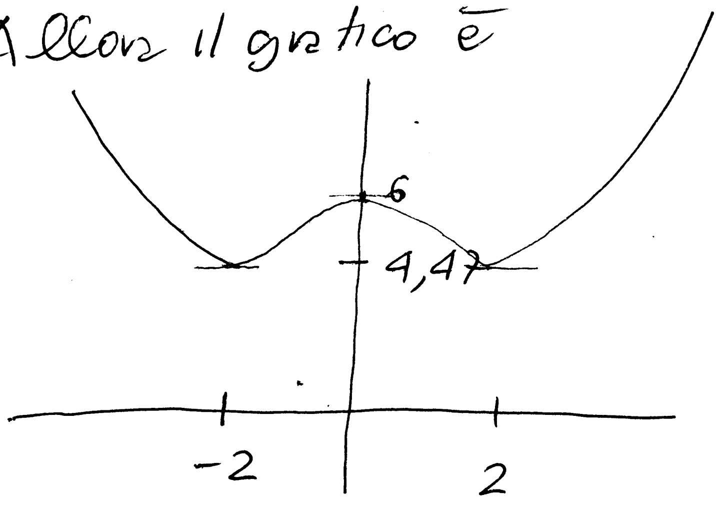
Quindi $f' \geq 0$ se $x \in [-2,0] \cup [2,+\infty]$ e $f' \leq 0$ altrove

Quindi crescenza di f



Calcoliamo $f(0) = 6$ $f(2) = \dfrac{10}{\sqrt{5}} = 4{,}47 = f(-2)$

Allora il grafico è



Non esiste massimo assoluto in tutto $\mathbb{R}$. Esistono due x di minimo assoluto $x=2$ e $x=2$. Il valore min assoluto è $\dfrac{10}{\sqrt{5}} \approx 4{,}47$

C E' simile ad A

f interseca l'asse x in $x=4$, sta sopra per $x \leq 4$ e sotto per $x \geq 4$.

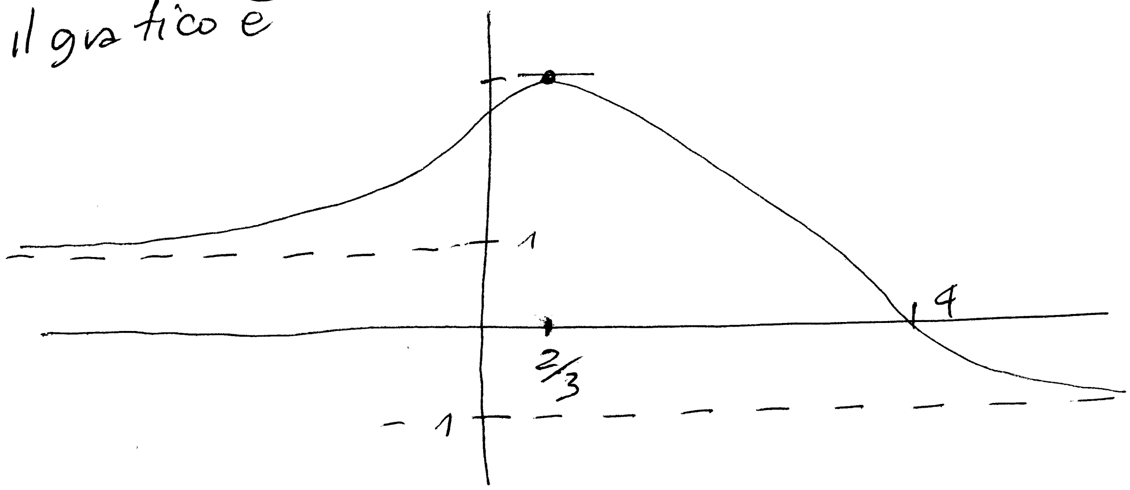
La derivata prima si calcola con un procedimento simile a quello di A e si ottiene

$$f'(x) = \frac{-3x+2}{\left(\sqrt{x^2-2x+2}\right)^3}$$

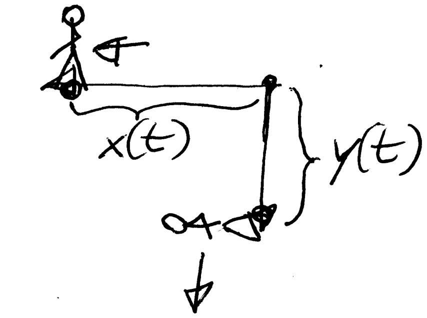
Allora $f'=0$ quando $x=+\frac{2}{3}$, f cresce per $x \leq +\frac{2}{3}$ e decresce per $x \geq +\frac{2}{3}$

Il valore di f in $x=+\frac{2}{3}$ è 3,16

Allora il grafico è



(4) gli esercizi dei compiti A, B e C sono tutti simili. La soluzione del compito B, ad esempio è



chiamiamo $x(t)$ lo spazio percorso dalla persona che si muove in direzione OVEST all'istante t, $y(t)$ quello percorso dalla persona che si muove in direzione SUD

Allora per il teorema di Pitagora

(*) $D(t)$ = distanza tra le due persone al tempo $t = \sqrt{(x(t))^2+(y(t))^2}$

Sappiamo dal testo che $\frac{dx(t)}{dt} = 4$ km/h e $\frac{dy(t)}{dt} = 9$ km/h

Vogliamo calcolare $\frac{d}{dt}D(t)$ quando $t = 15$ minuti

Per la regola di derivazione delle funzioni composite e da (*) si ha

$$\frac{d}{dt}D(t) = \frac{1}{2\sqrt{(x(t))^2+(y(t))^2}}\cdot\left(2X(t)\cdot\frac{dX}{dt}(t) + 2Y(t)\cdot\frac{dY}{dt}(t)\right)$$

Quando $t = 15$ min sappiamo che $\frac{dX}{dt} = 4$ e $\frac{dY}{dt} = 9$. Inoltre poiché X cammina ad una velocità di 4 km/h, dopo 15 minuti X ha percorso 1 km, cioè $X(15 \text{ minuti}) = 1$. Analogamente $Y(15 \text{ minuti}) = \frac{9}{4}$. Allora

$$\frac{d}{dt}D(15) = \frac{1}{2\sqrt{1^2+\left(\frac{9}{4}\right)^2}}\cdot\left(2\cdot1\cdot4 + 2\cdot\frac{9}{4}\cdot9\right) \approx 18{,}073$$

Nel compito C analogamente si ottiene $\frac{1}{2\sqrt{(1{,}5)^2+(2{,}5)^2}}(2\cdot1{,}5\cdot3+2\cdot2{,}5\cdot5)$

⑤ Ⓐ Mi serve l'equazione della retta per A e B che è 7 $y = \frac{3}{2}x+3$. Calcolo le coordinate del punto di intersezione tra il segmento AB e la parabola, che chiamo C.

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 3 \\ y = 3x^2 \end{cases} \longrightarrow 3x^2 = \frac{3}{2}x + 3 \longrightarrow 6x^2 - 3x + 6 = 0$$

$\longrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{153}}{12}$. La coordinata x di C è quella negativa, cioè $-0{,}78$.

Per scrivere l'area devo spezzare l'integrale in due parti (perché quando $x < -0{,}78$ ~~la funzione y = 3x² sta~~ l'insieme è limitato da sopra dalla parabola, mentre se $x > -0{,}78$ la parabola limita l'insieme da sotto)

$$\text{Area} = \int_{-2}^{-0{,}78} 3x^2 - \left(\frac{3}{2}x - 3\right) dx + \int_{-0{,}78}^{0} \left(\frac{3}{2}x - 3\right) - 3x^2 \, dx$$

Posso calcolare gli integrali tramite le primitive:

$$\text{Area} = \left[x^3 - \frac{3x^2}{4} + 3x\right]_{-2}^{-0{,}78} + \left[\frac{3}{4}x^2 - 3x - x^3\right]_{-0{,}78}^{0} = \ldots$$

Nel compito B l'equazione della retta per A e B è

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

e la coordinata x del punto C è $x = -1$.

Allora

$$\text{Area} = \int_{-2}^{-1} \left(\frac{x}{2}+1\right) - 0 \, dx + \int_{-1}^{0} \frac{x^2}{2} - 0 \, dx =$$

$$\left[\frac{x^2}{4} + x\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{0}$$

Nel compito C l'equazione della retta per A e B è $y = -\frac{3}{2}x + \frac{15}{2}$

La coordinata x del punto C è $\frac{15}{2} = 7{,}5$

Allora

$$\text{Area} = \int_{-5}^{0} 0 - \left(-\frac{3}{2}x - \frac{15}{2}\right) dx + \int_{0}^{7,5} -\frac{x^2}{3} - \left(-\frac{3}{2}x - \frac{15}{2}\right) dx$$

$$= \left[\frac{3}{4}x^2 + \frac{15}{2}x\right]_{-5}^{0} + \left[-\frac{x^3}{9} + \frac{3}{4}x^2 + \frac{15}{2}x\right]_{0}^{7,5}$$

6 A

lunghezza $= \int_{-\pi}^{0} \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_{-\pi}^{0} \sqrt{1+4(\cos(x))^2}\,dx$

$-\pi \quad -\frac{3}{4}\pi \quad -\frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{4} \quad 0$

La regola di Simpson dice che

$$\int_{-\pi}^{0} \sqrt{1+4(\cos(x)^2)}\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}\left(f(-\pi)+4f\left(-\frac{3}{4}\pi\right)+2f\left(\frac{\pi}{2}\right)+4f\left(-\frac{\pi}{4}\right)+f(0)\right)$$

$$= \frac{\pi}{12}\cdot\left(\sqrt{1+4\cos^2(-\pi)}+4\sqrt{1+4\cos^2\left(-\frac{3}{4}\pi\right)}+2\sqrt{1+4\cos^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)}+\right.$$

$$\left.+4\sqrt{1+4\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)}+\sqrt{1+4\cos^2(0)}\right) =$$

$$\frac{\pi}{12}\left(\sqrt{1+4\cdot}+4\sqrt{1+4(0{,}707)^2}+2\sqrt{1+4\cdot 0}+\right.$$

$$\left.+4\sqrt{1+4\cdot(0{,}707)^2}+\sqrt{1+4\cdot 1^2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{12}\left(2.2361+4\cdot 1{,}7321+2\cdot 1+4\ 1{,}7321+2{,}2361\right)$$

$$= 5{,}3221$$

B lunghezza $= \int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{1+16\cdot\cos^2(x)}\,dx$. Per calcolarne una approssimazione i punti sono

$\pi \quad \frac{5}{4}\pi \quad \frac{6}{4}\pi \quad \frac{7}{4}\pi \quad 2\pi$

e si ha $\int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{1+16\cdot\cos^2(x)}\,dx \approx \frac{\pi}{12}\cdot\left(\sqrt{1+16\cdot\cos^2(\pi)}+\right.$

$$+4\sqrt{1+16\cos^2\left(\frac{5}{4}\pi\right)}+2\sqrt{1+16\cdot\cos^2\left(\frac{6}{4}\pi\right)}+4\sqrt{1+16\cos^2\left(\frac{7}{4}\pi\right)}$$

10

$$+\sqrt{1+16\cos^2(2\pi)}\Bigg) =$$

$$\frac{\pi}{12}\left(4{,}1231+4\cdot 3+2\cdot 1+4\cdot 3+4{,}1231\right)=8{,}9656$$

Compito (C)

$$\text{lunghezza} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+9\,\mathrm{sen}^2(x)}\,dx$$

I punti necessari nel calcolo approssimato sono $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{4}$, 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$

e
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+9\cdot\mathrm{sen}^2(x)}\,dx=\frac{\pi}{12}\left(\sqrt{1+9\,\mathrm{sen}^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)}+4\sqrt{1+9\,\mathrm{sen}^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right.$$

$$\left.+2\sqrt{1+9\,\mathrm{sen}^2(0)}+4\sqrt{1+9\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}+\sqrt{1+9\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right)$$

$$=\frac{\pi}{12}\left(3{,}1623+4\cdot 2{,}34+2\cdot 1+4\cdot 2{,}3452+3.1623\right)$$

$$=7.0911$$

Esercizio 1' (compito da 6 crediti)

Si calcola $f'(x)=\frac{1}{(x-1)^2+4}\cdot 2(x-1)$. $f''(x)=\left[2\left((x-1)^2+4\right)-2(x-1)2(x-1)\right]\Big/\left((x-1)^2+4\right)^2=\frac{-2x^2+4x+6}{\left((x-1)^2+4\right)^2}$

Il segno di f'' è $-$ (-1) $+$ (3) $-$

Quindi f è concava verso l'alto in $[-1,3]$, verso il basso altrove