Nome: Corso di laurea:

Iscritto all'anno di corso:1 2 3 f.c.

Scritto di Matematica per cdl in Alimentari e Viticoltura ed Enologia
Prova scritta (12 crediti) del 4 Febbraio 2009

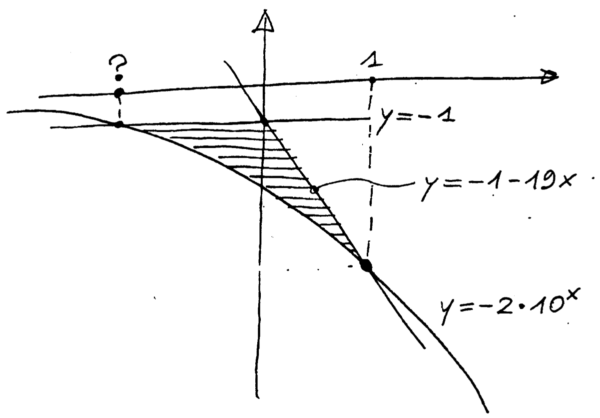
1) (6 punti) Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$$e^{x \sin x}, \quad \frac{3\cos x}{\sqrt{x^2+8}}, \quad \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$$

2) (7 punti) Trovare i punti critici della funzione $f(x) = x + 6\ln(x^2+11)$ e dire se tali punti sono di massimo o di minimo relativo. Trovare anche il massimo ed il minimo assoluto di f quando x varia in $[-20, 3]$.

3) (9 punti) Disegnare il grafico della funzione $\frac{x-1}{e^{x^2-4x}}$ (senza studiare la sua concavità). Indicare dominio, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti orizzontali e verticali, dove $f \geq 0$ e dove $f \leq 0$, dove f cresce e dove decresce.
Indicare anche massimi e minimi locali e assoluti (se esistono) e l'immagine della funzione.

4) (6 punti) Calcolare l'area della regione disegnata in figura.



5) (5 punti) Calcolare il valore esatto dell'integrale

$$\int_0^1 (x^2-1)(\sqrt{x}+1)\,dx$$

e poi confrontarlo con il suo valore approssimato calcolato tramite la regola dei punti medi, con $n = 5$.

Prova scritta (6 crediti)

Risolvere gli esercizi 1, 4 e 5 precedenti (nel 5 usare il metodo dei punti medi con n=5). Sostituire gli esercizi 2 e 3 precedenti con i seguenti:

2') (7 punti) Trovare il massimo ed il minimo assoluto di $\ln(3x-1) - \frac{x}{3}$ quando x varia in $[1, 4]$.

3') (9 punti) identico al 3) con la funzione sostituita da $\frac{x^2}{e^x}$.

(1) a) $\left(e^{x\,\text{sen}x}\right)' = e^{x\cdot\text{sen}x}\cdot(x\,\text{sen}x)' = e^{x\,\text{sen}x}\,(\text{sen}x + x\cos x)$

b) $\left(\dfrac{3\cos x}{\sqrt{x^2+8}}\right)' = \dfrac{-3\,\text{sen}x\cdot\sqrt{x^2+8} - 3\cos x\,\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+8}}\cdot 2x}{x^2+8}$

c) $\left(\dfrac{\ln x}{x^{\frac{1}{3}}}\right)' = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^{\frac{1}{3}} - \ln x\,\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{3-\ln x}{3x^{\frac{4}{3}}}$

(2) Calcolo $f'(x) = 1 + \dfrac{6}{x^2+11}\cdot 2x = \dfrac{x^2+11+12x}{x^2+11}$

Cerco i punti critici $f'=0 \Leftrightarrow x^2+12x+11=0 \Leftrightarrow x=-11$ e $x=-1$

studio il segno di f'

		-11		-1	
$x^2+12x+11$	$+$		$-$		$+$
x^2+11	$+$		$+$		$+$

Quindi f ha il seguente comport. $\to$ $\nearrow$ -11 $\searrow$ -1 $\nearrow$

Allora $x=-11$ è max locale, $x=-1$ è min locale

Confronto il valore di f nei punti $x=-20$ $x=3$, $x=-11$ e $x=-1$

$f(-20)=15{,}11$ $\quad f(-11)=18{,}29$ $\quad f(-1)=13{,}91$ $\quad f(3)=20{,}97$

Quindi il min assoluto in $[-20,3]$ si ha quando $x=-1$, il max assoluto quando $x=3$

(3) Poichè e^{x^2-ax} è >0 per ogni x, il dominio è $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{e^{x^2-ax}} = "\dfrac{\infty}{e^{\infty}}" = \dfrac{\infty}{\infty}$. Con L'Hopital $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x^2-ax}\cdot(2x-a)} = \dfrac{1}{\infty} = 0$

Analogamente $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{e^{x^2-ax}} = 0$

(2) $f=0 \Leftrightarrow x-1=0 \to x=1$

$f\geq 0 \longrightarrow$

		1	
$x-1$	$-$		$+$
e^{x^2-4x}	$+$		$+$

$\Longrightarrow$ $f\geq 0$ in $x\geq 1$

(3) Calcolo $f' \to \dfrac{1\,e^{x^2-4x} - (x-1)e^{x^2-4x}(2x-4)}{\left(e^{x^2-4x}\right)^2} = \dfrac{1-(x-1)(2x-4)}{e^{x^2-4x}} =$

$= \dfrac{-2x^2+6x-3}{e^{x^2-4x}}$

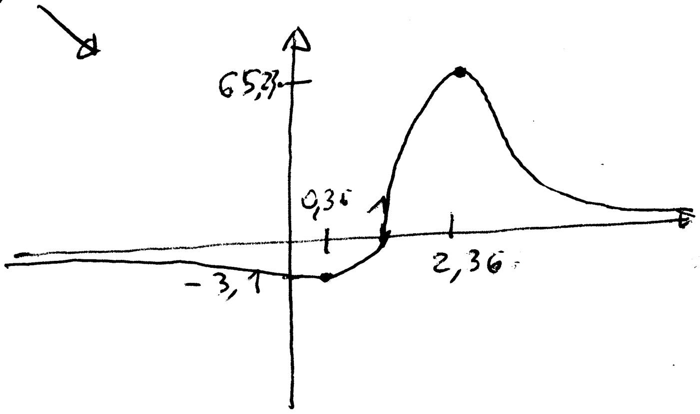
$f'=0 \to -2x^2+6x-3=0 \quad x=\dfrac{-6\pm\sqrt{12}}{-4} \left\langle \begin{array}{l} 2,36 \\ +0,63 \end{array}\right.$

$f(2,36)=65,23 \qquad f(0,63)=-3,1$

$f' \geq 0$

$-2x^2+6x-3$	$-$	$+$	$-$
e^{x^2-4x}	$+$	$+$	$+$
		0,63	2,36

Quindi f $\searrow \quad \nearrow \quad \searrow$



$x=2,36$ max assoluto
$x=0,36$ min assoluto
$y=0$ asintoto orizzontale sia per $x\to+\infty$ che per $x\to-\infty$
immagine $=[-3,1,\ 65,23]$

④ calcolo l'ascissa dell'intersezione tra $y=-1$ e $y=-2\cdot 10^x$

$\begin{cases} y=-1 \\ y=-2\cdot 10^x \end{cases} \to \quad -1=-2\,10^x \to \quad 10^x=1/2 \to x=\log_{10}\left(\tfrac{1}{2}\right) \approx -0,30$

allora area $= \displaystyle\int_{\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)}^{0} -1-(-2\cdot 10^x)\,dx + \int_0^1 -1-10x-(-2\cdot 10^x)\,dx$

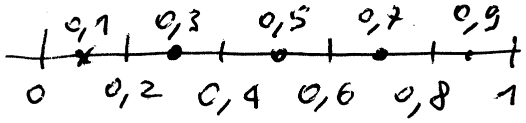
$= \displaystyle\int_{\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)}^{0} -1+2\cdot 10^x\,dx + \int_0^1 -1-10x+2\cdot 10^x\,dx = \left[-x+2\cdot\frac{10^x}{\ln 10}\right]_{\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)}^{0}$

$\left[-x-\frac{10}{2}x^2+2\frac{10^x}{\ln 10}\right]_0^1 = \ldots\ldots\ 0,133$

⑤ $\displaystyle\int_0^1 (x^2-1)(\sqrt{x}+1)\,dx = \int_0^1 x^2\sqrt{x}-\sqrt{x}+x^2-1\,dx = \left[\frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1}-\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\frac{x^3}{3}-x\right]_0^1$

$=\left[\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{x^3}{3}-x\right]_0^1 = \ldots\ldots$

Calcolo valore approssimato



$$\int_0^1 (x^2-1)(\sqrt{x}+1)\,dx \approx 0,2 \cdot \left[(0,1^2-1)(\sqrt{0,1}+1)+(0,3^2-1)(\sqrt{0,3}+1)+\dots+(0,9^2-1)(\sqrt{0,9}+1)\right]$$

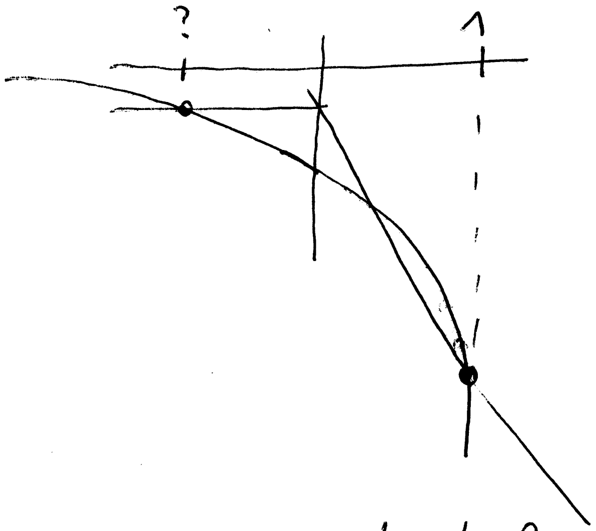
$$= 0,2\left[(-0,99)\cdot(1,3)+(-0,91)(1.54)+(-0,75)(1.707)+(-0,51)(1.83)+(-0,19)(1,94)\right]$$

$$=-1,05$$

Commenti: Per calcolare la primitiva della funzione nell'esercizio 5 è necessario prima sviluppare i prodotti in

① $(x^2-1)(\sqrt{x}+1)$. Come ho detto varie volte a lezione la primitiva di $(x^2-1)(\sqrt{x}+1)$ <u>NON</u> la si può calcolare trovando la primitiva di x^2-1, e la primitiva di $\sqrt{x}+1$ e poi moltiplicandole tra di loro.

② Il disegno nell'esercizio 4 è sbagliato (mio errore!) Il disegno corretto sarebbe stato



Questo spiega perché nel calcolo dell'area della parte dell'insieme a destra dell'asse y si otteneva un risultato negativo. Ovviamente ho tenuto conto di questo mio errore nel testo nella correzione. Ho considerato corretto un esercizio in cui sia stato trovato il punto ?, sia stato impostato correttamente l'integrale, come se la figura nel testo fosse corretta, e infine siano state trovate le primitive giuste.

Nome: Corso di laurea:

Iscritto all'anno di corso: 1 2 3 f.c.

Scritto di Matematica per cdl in Alimentari e Viticoltura ed Enologia
Prova scritta (12 crediti) del 4 Febbraio 2009

1) (6 punti) Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

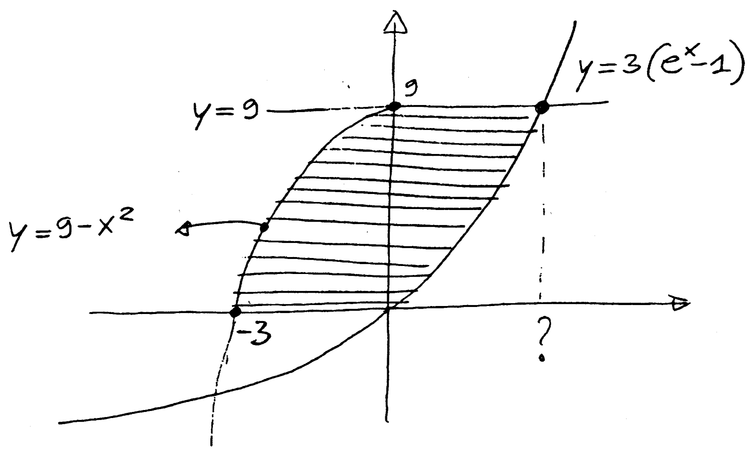
$$\sqrt{x(\cos x+1)}, \quad \frac{e^x}{(3x^2+6)^{10}}, \quad \sqrt[4]{x}\ln x$$

2) (7 punti) Trovare i punti critici della funzione $f(x) = x - 4\ln(x^2+7)$ e dire se tali punti sono di massimo o di minimo relativo. Trovare anche il massimo ed il minimo assoluto di f quando x varia in $[-2, 10]$.

3) (9 punti) Disegnare il grafico della funzione $\frac{4x^2-1}{e^{1+2x}}$ (senza studiare la sua concavità). Indicare dominio, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti orizzontali e verticali, dove $f \geq 0$ e dove $f \leq 0$, dove f cresce e dove decresce.

Indicare anche massimi e minimi locali e assoluti (se esistono) e l'immagine della funzione.

4) (6 punti) Calcolare l'area della regione disegnata in figura.



5) (5 punti) Calcolare il valore esatto dell'integrale

$$\int_1^3 \frac{\sqrt{x}+1+x}{x}\,dx$$

e poi confrontarlo con il suo valore approssimato calcolato tramite la regola di Simpson, con $n = 4$.

Prova scritta (6 crediti)

Risolvere gli esercizi 1, 4 e 5 precedenti (nel 5 usare il metodo dei punti medi con n=5). Sostituire gli esercizi 2 e 3 precedenti con i seguenti:

2') (7 punti) Trovare il massimo ed il minimo assoluto di $\ln(3x-1) - \frac{x}{3}$ quando x varia in $[1, 4]$.

3') (9 punti) identico al 3) con la funzione sostituita da $\frac{x^2}{e^x}$.

① $\left(\sqrt{\cancel{x}(\cos x+1)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x(\cos x+1)}} \cdot [x(\cos x+1)]' = \frac{(\cos x+1)+x(-\sin x)}{2\sqrt{x(\cos x+1)}}$

$\left(\frac{e^x}{(3x^2+6)^{10}}\right)' = \frac{e^x\cdot(3x^2+6)^{10} - e^x\cdot 10(3x^2+6)^9\cdot 6x}{(3x^2+6)^{20}}$

$\left(x^{\frac{1}{4}}\ln x\right)' = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}\ln x + x^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{\ln x+4}{4x^{3/4}}$

② Noto che x^2+7 è >0 per ogni x e quindi la funzione è definita per ogni x.

Calcolo $f' = 1 - 4\frac{2x}{x^2+7} = \frac{x^2-8x+7}{x^2+7}$

Cerco i punti critici. Dato che il denominatore in f' non si annulla mai basta trovare i punti in cui $f'=0$. $\rightarrow x^2-8x+7=0 \rightarrow x=1$ e $x=7$

studio il segno di f'

		1		7	
x^2-8x+7	+		−		+
x^2+7	+		+		+
Quindi f	cresce		decresce		cresce

Allora $x=1$ è un max locale, mentre $x=7$ è un min locale

Per trovare il max assoluto di f in $[-2,10]$ devo confrontare

$f(-2) = -11{,}6$ $f(1) = -7{,}3$ $f(7) = -9{,}1$ $f(10) = -8{,}69$

Di conseguenza $x=1$ è il max assoluto per f in $(-2,10)$, mentre $x=-2$ è il min assoluto.

③ a) Poiché e^{1+2x} è >0 per ogni x il dominio è $\mathbb{R}$

b) calcolo i limiti necessari

$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-1}{e^{1+2x}} = \frac{+\infty}{e^{+\infty}} = \frac{\infty}{\infty}$. Applicando la regola di L'Hopital

$\lim_{x\to+\infty}\frac{8x}{2e^{1+2x}} = \frac{\infty}{\infty}$. Applico ancora L'Hopital $\lim_{x\to+\infty}\frac{8}{4e^{1+2x}} = \frac{8}{\infty} = 0$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-1}{e^{1+2x}} = \frac{+\infty}{e^{-\infty}} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$

c) $f=0 \longrightarrow 4x^2-1=0 \longrightarrow x=\pm\frac{1}{2}$

$f\geq 0 \longrightarrow$

		$-\frac{1}{2}$		$+\frac{1}{2}$	
$4x^2-1$	$+$		$-$		$+$
e^{1+2x}	$+$		$+$		$+$

$f\geq 0$ in $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

d) $$f'=\frac{8x\,e^{1+2x}-(4x^2-1)\,e^{1+2x}\cdot 2}{\left(e^{1+2x}\right)^2}=\frac{8x-2(4x^2-1)}{e^{1+2x}}=\frac{-8x^2+8x+2}{e^{1+2x}}$$

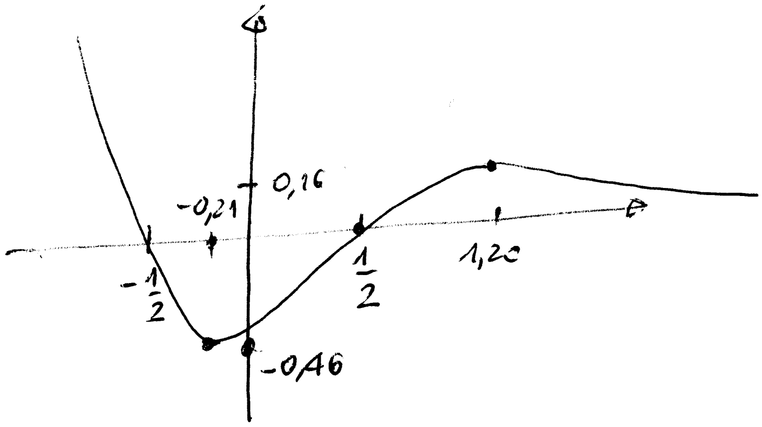
$f'=0 \longrightarrow -8x^2+8x+2=0 \longrightarrow x=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\approx -0,21\,,\ 1,20$

$f'\geq 0$

		$-0,21$		$1,20$	
$-8x^2+8x+2$	$-$		$+$		$-$
e^{1+2x}	$+$		$+$		$+$

Quindi f decresce cresce decresce

Calcoliamo $f(-0,21)=-0,46$ e $f(1,20)=0,16$



$x=1,20$ è max relativo
$x=-0,21$ è min assoluto
$y=0$ è asintoto orizzontale
immagine $[-0,46,+\infty)$

④ Calcolo l'ascissa dell'intersezione tra $y=9$ e $y=3(e^x-1)$

$\begin{cases} y=9 \\ y=3(e^x-1)\end{cases} \longrightarrow 9=3(e^x-1) \qquad 3=e^x-1 \qquad e^x=4 \quad x=\ln 4\approx 1,38$

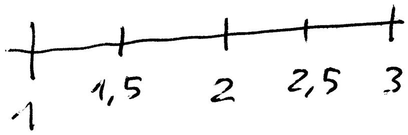
$$\text{Area}=\int_{-3}^{0}(9-x^2)-0\,dx+\int_0^{\ln 4}9-(3(e^x-1))\,dx=\left[9x-\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{0}+$$

$$+\left[9x-3e^x+3x\right]_0^{\ln 4}=\ldots\ldots$$

(5) $\displaystyle\int_1^3 \frac{\sqrt{x}+1+x}{x}\,dx = \int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x}+\frac{1}{x}+1\,dx = \left[\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+\ln|x|+x\right]_1^3$

$\displaystyle = \left[2\sqrt{x}+\ln|x|+x\right]_1^3 = \left(2\sqrt{3}+\ln(3)+3\right)-\left(2+\ln 1+1\right)$

Calcolo approssimato con regola di Simpson e $n=4$



$$\int_1^3 \frac{\sqrt{x}+1+x}{x}\,dx \approx \frac{0,5}{3}\left(\frac{\sqrt{1}+1+1}{1}+4\left(\frac{\sqrt{1,5}+1+1,5}{1.5}\right)+2\left(\frac{\sqrt{2}+1+2}{2}\right)+4\left(\frac{\sqrt{2,5}+1+2,5}{2,5}\right)+\frac{\sqrt{3}+1+3}{3}\right)$$

$$= 0,17\left(3+4(2.48)+2(2.20)+4(2.03)+1.91\right)$$

$$\approx 4,64$$

Nome: Corso di laurea:
Iscritto all'anno di corso:1 2 3 f.c.

Scritto di Matematica per cdl in Alimentari e Viticoltura ed Enologia
Prova scritta (12 crediti) del 4 Febbraio 2009

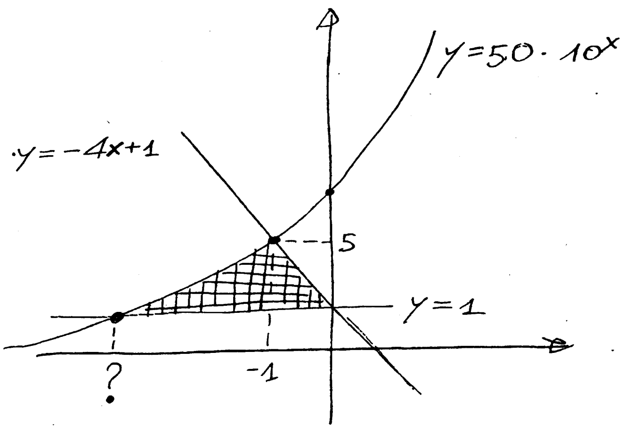
1) (6 punti) Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$$2x\sqrt{e^x+1}, \quad \ln\left(\frac{x^2}{\sin x}\right), \quad \sqrt[3]{x}\tan x$$

2) (7 punti) Trovare i punti critici della funzione $f(x) = x + 9\ln(x^2+5)$ e dire se tali punti sono di massimo o di minimo relativo. Trovare anche il massimo ed il minimo assoluto di f quando x varia in $[-10, -2]$.

3) (9 punti) Disegnare il grafico della funzione $\frac{e^{3x-x^2}}{x}$ (senza studiare la sua concavità). Indicare dominio, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti orizzontali e verticali, dove $f \geq 0$ e dove $f \leq 0$, dove f cresce e dove decresce.
Indicare anche massimi e minimi locali e assoluti (se esistono) e l'immagine della funzione.

4) (6 punti) Calcolare l'area della regione disegnata in figura.



5) (5 punti) Calcolare il valore esatto dell'integrale

$$\int_2^4 \left(\frac{1}{x^2} - 2\right)(x + \sqrt{x})\, dx$$

e poi confrontarlo con il suo valore approssimato calcolato tramite la regola del trapezio, con $n = 4$.

Prova scritta (6 crediti)

Risolvere gli esercizi 1, 4 e 5 precedenti (nel 5 usare il metodo dei punti medi con n=5). Sostituire gli esercizi 2 e 3 precedenti con i seguenti:

2') (7 punti) Trovare il massimo ed il minimo assoluto di $\ln(3x-1) - \frac{x}{3}$ quando x varia in $[1, 4]$.

3') (9 punti) identico al 3) con la funzione sostituita da $\frac{x^2}{e^x}$.

1) $\left(2x\sqrt{e^x+1}\right)' = 2\sqrt{e^x+1} + \cancel{2}x\,\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{e^x+1}}\cdot e^x = \frac{2(e^x+1)+xe^x}{\sqrt{e^x+1}}$

$\left(\ln\left(\frac{x^2}{\operatorname{sen}x}\right)\right)' = \frac{1}{\frac{x^2}{\operatorname{sen}x}}\cdot\frac{2x\operatorname{sen}x - x^2\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\cancel{\operatorname{sen}x}}{x^2}\,\frac{(2x\operatorname{sen}x - x^2\cos x)}{\operatorname{sen}^{\cancel{2}}x}$

$= \frac{(2\operatorname{sen}x - x\cos x)}{\operatorname{sen}x}$

$\left(x^{\frac{1}{3}}\tan x\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}\tan x + x^{\frac{1}{3}}\frac{1}{\cos^2 x}$

2)
La funzione è definita per ogni x perchè x^2+5 è positivo sempre.

Calcoliamo f' $f' = 1 + \frac{9}{x^2+5}\cdot 2x = \frac{x^2+18x+5}{x^2+5}$

Cerchiamo i punti critici. $f'=0 \iff x^2+18x+5=0$

$x = -9\pm\sqrt{76}$ $\left\langle \begin{array}{l} =-17{,}7 \\ =-0{,}28 \end{array}\right.$

Studiamo il segno di f'

+	−	+	$x^2+18x+5$
+	+	+	x^2+5
	$-17{,}7$	$-0{,}28$		
crescente	decr.	crescente		

Quindi f è

Allora $x=-0{,}28$ è ~~max~~ min relativo, mentre $x=-17{,}7$ è max relativo

Per determinare il punto di max (e di min) assoluto in $[-10,-2]$ devo confrontare il valore di f negli estremi dell'intervallo e nei punti critici **DENTRO** l'intervallo (che, in questo caso, non esistono)

$f(-10)=31{,}8$ $f(-2)=17{,}7$.

Quindi $x=-10$ è di max assoluto per f in $[-10,-2]$, mentre $x=-2$ è di min assoluto.

3) a) Dominio $=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x-x^2}}{x} = \frac{e^{-\infty}}{+\infty} = \frac{0^+}{+\infty} = 0$

Analogamente $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{3x-x^2}}{x} = 0$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{3x-x^2}}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$. $\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{3x-x^2}}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

c) $f = 0 \rightarrow e^{3x-x^2} = 0$ MAI

$f \geq 0 \rightarrow$

		0	
e^{3x-x^2}	$+$		$+$
x	$-$		$+$

$f \geq 0$ in $(0, +\infty)$

d) $$f' = \frac{e^{3x-x^2}(3-2x)\cdot x - e^{3x-x^2}\cdot 1}{x^2} = e^{3x-x^2}\frac{(-2x^2+3x-1)}{x^2}$$

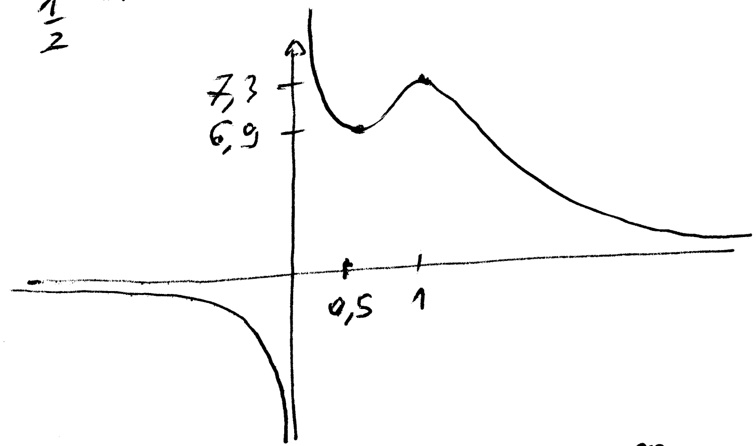
$f' = 0 \rightarrow -2x^2+3x-1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$

Segno di f'

		$\frac{1}{2}$		1	
e^{3x-x^2}	$+$		$+$		$+$
x^2	$+$		$+$		$+$
$-2x^2+3x+1$	$-$		$+$		$-$

Quindi f è crescente in $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ e decrescente altrove

$f(1) = 7{,}3 \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 6{,}9$



$x = 0{,}5$ min relativo
$x = 1$ max relativo
$y = 0$ asintoto orizzontale sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$
$x = 0$ asintoto verticale sia per $x \to 0^+$ che per $x \to 0^-$
Immagine $= (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

4) Trovo l'ascissa del punto di intersezione tra $y = 1$ e $y = 50 \cdot 10^x$

$$\begin{cases} y = 1 \\ y = 50 \cdot 10^x \end{cases} \rightarrow 1 = 50 \cdot 10^x \rightarrow 10^x = \frac{1}{50} \rightarrow x = \log_{10}\left(\frac{1}{50}\right) \approx -1{,}69$$

$$\text{Area} = \int_{\log_{10}\left(\frac{1}{50}\right)}^{-1} 50 \cdot 10^x - 1 \, dx + \int_{-1}^{0} (-4x+1) - 1 \, dx = \left[50 \cdot \frac{10^x}{\ln 10} - x\right]_{\log_{10}\left(\frac{1}{50}\right)}^{-1}$$

$$+\left[-2x^2\right]_{-1}^{0} = \cdots\cdots$$

⑤ $$\int_2^4 \left(\frac{1}{x^2}-2\right)\left(x+\sqrt{x}\right)dx = \int_2^4 \frac{x}{x^2}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}-2x-2\sqrt{x}\,dx$$

$$=\int_2^4 \frac{1}{x}+x^{-\frac{3}{2}}-2x-2x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\ln(x)+\frac{1}{-\frac{3}{2}+1}x^{-\frac{3}{2}+1}-x^2-\frac{2}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}\right]_2^4$$

$$=\left[\ln|x| + 2x^{-\frac{1}{2}} - x^2 - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_2^4 = \cdots\cdots$$

Calcolo approssimato tramite regola del trapezio $n=4$

$\Delta x = 0{,}5$

2   2,5   3   3,5   4

$$\text{Integrale} \approx \frac{0{,}5}{2}\left(f(2)+2f(2{,}5)+2f(3)+2f(3{,}5)+f(4)\right)$$

$$=0{,}25\left[\left(\frac{1}{2^2}-2\right)\left(2+\sqrt{2}\right)+2\left(\frac{1}{(2{,}5)^2}-2\right)\left(2{,}5+\sqrt{2{,}5}\right)+2\left(\frac{1}{3^2}-2\right)\left(3+\sqrt{3}\right)\right.$$
$$\left.+2\left(\frac{1}{(3{,}5)^2}-2\right)\left(3{,}5+\sqrt{3{,}5}\right)+\left(\frac{1}{4^2}-2\right)\left(4+\sqrt{4}\right)\right]$$

Esercizi del compito per 6 crediti
non compresi tra i precedenti

2) la funzione è definita in $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ perché al di fuori di tale intervallo l'argomento del logaritmo è negativo o nullo.

Calcoliamo f'. $\frac{3}{3x-1} - \frac{1}{3} = \frac{9-(3x-1)}{3(3x-1)} = \frac{10-3x}{3(3x-1)}$

Studiamo dove $f'=0$ $\rightarrow$ $10-3x=0$ $\rightarrow$ $x=\frac{10}{3}$

c'è un solo punto critico nel dominio di f ed è $x=\frac{10}{3}$

Segno di f' (nel dominio di f)

	$\frac{1}{3}$ — $\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}$ — $+\infty$
$10-3x$	+	−
$3(3x-1)$	+	+

Quindi f è crescente in $\left(\frac{1}{3}, \frac{10}{3}\right]$ e decrescente in $\left[\frac{10}{3}, +\infty\right)$

Allora $x=\frac{10}{3}$ è di max locale.

Per trovare il max e min assoluto in $[1,4]$ devo confrontare il valore di f in $x=1$, $x=4$ e nei punti critici contenuti in $[1,4]$, cioè in $x=\frac{10}{3}$

$f(1)=0{,}35$ $\quad f(4)=1{,}06$ $\quad f\left(\frac{10}{3}\right)=1{,}08$

Allora $x=\frac{10}{3}$ è max assoluto per f in $[1,4]$, mentre $x=1$ è min assoluto

3) dominio $\mathbb{R}$ (perché $e^x \neq 0$ sempre)

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$. Applicando l'Hopital 2 volte si ottiene che tale limite è 0.

$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{+\infty}{e^{-\infty}} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$

Segno di $f \to$ sempre ≥ 0

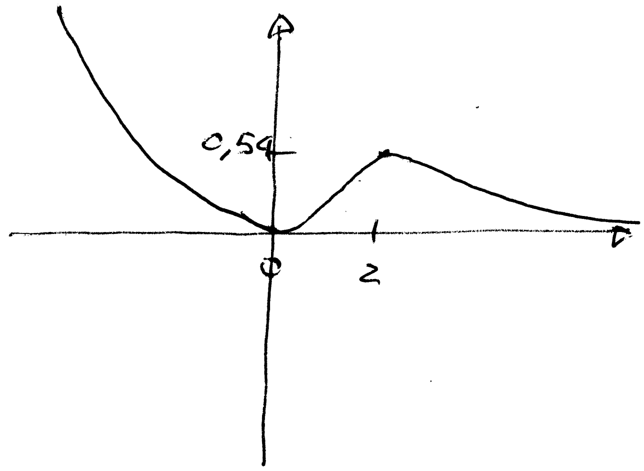
Calcolo f' $\quad f' = \dfrac{2x e^x - x^2 e^x}{e^{2x}} = \dfrac{2x - x^2}{e^x}$

Segno di f'

	$x<0$	$0<x<2$	$x>2$
$2x-x^2$	$-$	$+$	$-$
e^x	$+$	$+$	$+$

$0 \qquad 2$

Quindi f cresce in $[0,2]$ e decresce altrove



$f' = 0 \to x = 0$ e $x = 2$

$f(0) = 0 \quad f(2) = \dfrac{4}{e^2} \approx 0,54$