Nome: Corso di laurea:

Iscritto all'anno di corso:1 2 3

Corso di Matematica, Prova scritta del 13 febbraio 2008
Corsi di laurea in Alimentari e Viticoltura ed Enologia

In questo compito vi è richiesto di consegnare lo svolgimento completo degli esercizi, scritti su dei fogli a parte, e non solo questo foglio con i risultati.

1) (5 punti) Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$$\frac{(x^2+6)^5}{e^{3x+1}}, \quad \tan(x)+\frac{1}{x^3}, \quad \ln(\sin(x))+\frac{1}{2}(\sin(x))^2$$

2) (7 punti) Trovare il massimo ed il minimo assoluto di $\sqrt{x}(-3x^2+20x-45)$ quando x varia tra 0.5 e 4.

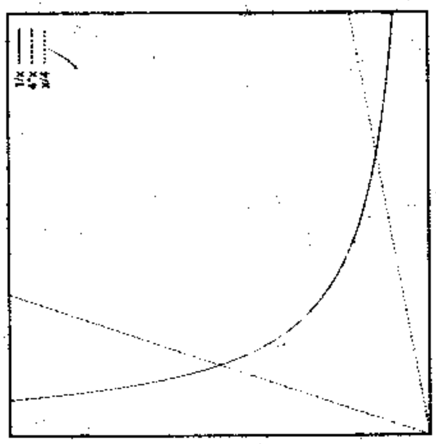
3) (10 punti) Disegnare il grafico della seguente funzione, (senza studiare la sua concavità):

$$f(x)=\frac{x+x^2}{e^{2x}}$$

Indicare dominio, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, dove $f \geq 0$ e dove $f \leq 0$, dove f cresce e dove decresce.

Indicare anche massimi e minimi locali e assoluti e l'immagine della funzione.

4) (6 punti) Calcolare l'area dell'insieme contenuto nel I quadrante e racchiuso tra le tre curve $y=1/x$, $y=4x$ e $y=x/4$.



5) (5 punti) Calcolare il valore esatto dell'integrale

$$\int_1^3 \left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{x}\right)\,dx$$

e poi confrontarlo con il suo valore approssimato ottenuto tramite la regola del trapezio (con $n=5$).

① $\left(\frac{(x^2+6)^5}{e^{3x+1}}\right)' = \frac{5\,(x^2+6)^4\,2x \cdot e^{3x+1} - (x^2+6)^5 e^{3x+1}\cdot 3}{e^{6x+2}}$

$\left(\tan x + \frac{1}{x^3}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} - 3x^{-4}$

$\left(\ln(\operatorname{sen}(x)) + \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x)^2\right)' = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\cdot \cos x + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x$

② $f' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(-3x^2+20x-45\right) + \sqrt{x}\cdot\left(-6x+20\right) = \frac{-15x^2+60x-45}{2\sqrt{x}}$

punti critici $\to$ $f'=0$ $\quad x=1$ e $x=3$

f' non esiste $\quad x=0$

il massimo e il minimo o sono in $x=\frac{1}{2}$ o in $x=4$ o in $x=1$ o in $x=4$

$f(0{,}5) = -25$

$f(4) = -26$

$\boxed{\begin{matrix} f(1) = -28 \\ f(3) = -20{,}7 \end{matrix}}$

Quindi il minimo è in $x=1$ e il massimo è in $x=3$

③ dominio $=\mathbb{R}$

$\lim_{x\to+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty}$ indeterminata. Usando Hopital 2 volte tale limite è 0

$\lim_{x\to-\infty} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$

$f \geq 0$?

	-1		0	
$+++$		$--$		$+++$
$++$		$++$		$+++$
$+$		$-$		$+$

segno di $x+x^2$

segno di e^x

segno di f

calcolo f'

$f' = \frac{(1+2x)\,e^{2x} - (x+x^2)\,e^{2x}\,2}{(e^{2x})^2} = \frac{\left[(1+2x)-2(x+x^2)\right]\cancel{e^{2x}}}{(e^{2x})^{\cancel{2}}}$

$= \frac{1-2x^2}{e^{2x}}$

segno di f'

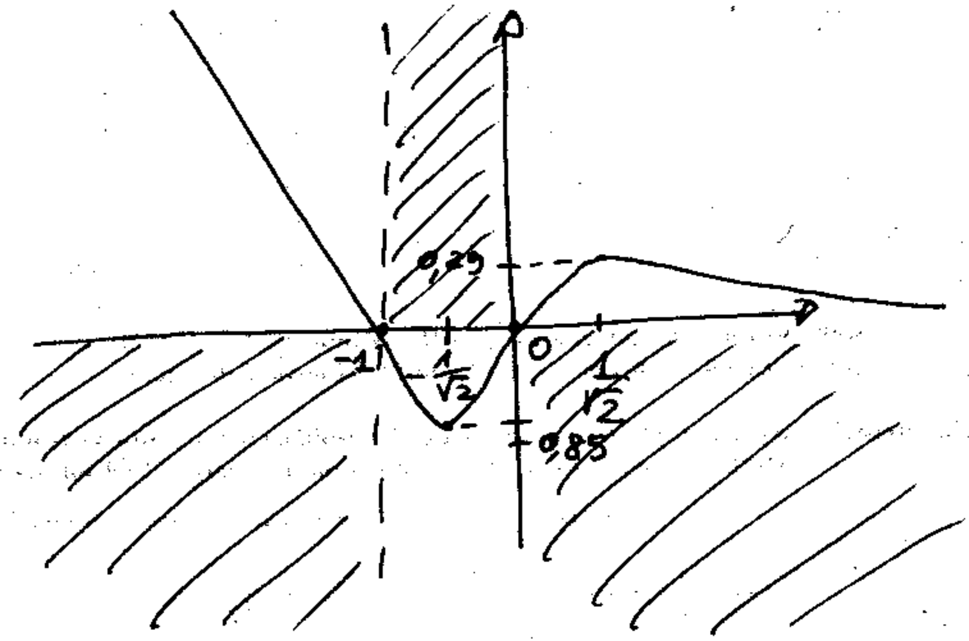
crescenza di f

	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$--$		$++$		$--$
$++$		$++$		$++$
$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$1-2x^2$

e^{2x}

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -0{,}85 \qquad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}29$



$x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ è min locale e anche min assoluto

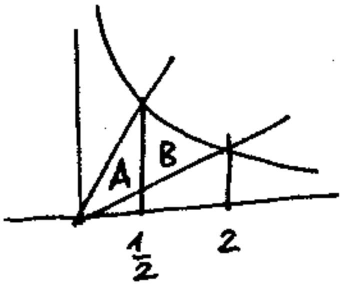
$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ è max locale

Non esiste max assoluto

Immagine $= [-0,85, +\infty)$

④ Intersezione tra $y=\frac{1}{x}$ e $y=\frac{x}{4}$ $\qquad \begin{cases} y=\frac{x}{4} \\ y=\frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{4}=\frac{1}{x} \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=2$

" " " " $y=4x$ $\qquad \begin{cases} y=4x \\ y=\frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow 4x=\frac{1}{x} \Rightarrow 4x^2=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$



$$\text{area } A = \int_0^{1/2} 4x-\frac{x}{4}\,dx = \left[2x^2-\frac{x^2}{8}\right]_0^{\frac{1}{2}} = 2\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{32}$$

$$\text{area } B = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x}-\frac{x}{4}\,dx = \left[\ln x-\frac{x^2}{8}\right]_{\frac{1}{2}}^{2} =$$

$$= \ln 2-\ln\frac{1}{2}-\left(\frac{4}{8}-\frac{1}{32}\right)$$

Area totale = area A + area B

⑤ $\int_1^3\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{x}\right)dx = \left[\arctan x+\ln x\right]_1^3 = \arctan 3-\arctan 1+\ln 3-\ln 1 \approx 1.56$

Calcolo approssimato. $\qquad$ 1 $\quad$ 1,4 $\quad$ 1,8 $\quad$ 2,2 $\quad$ 2,6 $\quad$ 3

Integrale circa uguale a

$$\frac{0,4}{2}\left[\left(\frac{1}{1+1^2}+\frac{1}{1}\right)+2\left(\frac{1}{1+(1,4)^2}+\frac{1}{1,4}\right)+2\left(\frac{1}{1+(1,8)^2}+\frac{1}{1,8}\right)+\dots+\left(\frac{1}{1+3^2}+\frac{1}{3}\right)\right]$$