UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica

SUL COMPORTAMENTO OSCULATORIO DI SUPERFICI SPECIALI E UNA CONGETTURA DI PIENE–TAI

Relatore: Prof. Antonio Lanteri
Correlatore: Prof. Alberto Alzati

Tesi di Laurea di:

Maria Chiara Brambilla

Matr. n. 545430

Anno Accademico 1999/2000

Indice

Introduzione **3**

Materiale di base **6**

0.1 Notazioni e richiami 6
0.2 Superfici rigate e geometricamente rigate 9
0.3 Scroll 11
0.4 Alcuni risultati relativi alle superfici 12
0.5 Risultati di teoria dell'aggiunzione 13
0.6 Classi di Chern di un fibrato vettoriale 14

1 Spazi osculatori di superfici proiettive e patologie relative **17**

1.1 Superfici geometricamente rigate razionali 17
1.2 Spazi osculatori di varietà proiettive 18
1.3 Superfici con secondo spazio osculatore degenere 21
1.4 Un esempio di comportamento patologico: la superficie di Togliatti 23
1.5 Il comportamento osculatorio di secondo ordine degli scroll . . 26
1.6 La congettura di Piene–Tai 32

2 Dimostrazione della congettura di Piene–Tai in dimensione dispari **35**

2.1 Superfici in spazi proiettivi di dimensione dispari 35
2.2 Proprietà della varietà duale stretta 36
2.3 Relazioni tra gli invarianti numerici 39
2.4 La dimostrazione del teorema di Ballico–Piene–Tai 48

3 Comportamento osculatorio degli scroll ellittici **53**

3.1 Superfici geometricamente rigate ellittiche 53

3.2 Scroll ellittico di invariante -1 in $\mathbf{P}^6$ 57
3.3 Scroll ellittico di invariante -1 in $\mathbf{P}^{2m}$ 61
3.4 Scroll ellittici con invariante non negativo 64
3.5 Altri modelli della superficie geometricamente rigata ellittica di invariante -1 67

Bibliografia **72**

Introduzione

Lo studio delle varietà che presentano patologie dal punto di vista osculatorio ha ricevuto numerosi contributi nell'ambito della geometria proiettiva differenziale, sia nel contesto classico, che in tempi recenti.

Sia $X \subset \mathbf{P}^N$ una varietà proiettiva complessa non singolare n-dimensionale, non iperpiana e sia $L = (\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}(1))_X$ il suo fibrato iperpiano. Si può allora interpretare $\mathbf{P}^N$ come il proiettivizzato $\mathbf{P}(V)$ di un opportuno sottospazio vettoriale V di $H^0(X, L)$. L'oggetto appropriato per lo studio degli spazi k-osculatori ad X è il k-esimo fibrato in getti J_kL, la cui fibra al punto x, $(J_kL)_x$, è lo spazio vettoriale degli sviluppi di Taylor delle sezioni locali di L, in x, troncati all'ordine k. Considerato infatti l'omomorfismo naturale $j_{k,x} : V \to (J_kL)_x$, il k-esimo spazio osculatore ad X in x può essere definito come $\mathrm{Osc}_x^k(X) = \mathbf{P}(\mathrm{Im}(j_{k,x}))$.

Poichè il fibrato J_kL ha rango $\binom{n+k}{n}$, il comportamento ottimale di X dal punto di vista k-osculatorio si registra quando X è k-regolare, ossia $j_{k,x}$ ha rango pari a $\binom{n+k}{n}$ in ogni punto. Naturalmente questa è una condizione assai restrittiva. Ma esistono varietà che non sono k-regolari nemmeno genericamente, varietà cioè per le quali risulta che $\mathrm{rk}(j_{k,x}) < \binom{k+n}{n}$ per ogni $x \in X$. L'indagine di queste varietà presenta aspetti interessanti e problemi ancora irrisolti addirittura nel contesto delle superfici, cioè per $n = 2$.

Sia ora X una superficie. Detto $\sigma_k + 1$ il massimo dei valori assunti da $\mathrm{rk}(j_{k,x})$ su X, si ha che la condizione $\dim(\mathrm{Osc}_x^k(X)) = \sigma_k$ vale per i punti di un aperto denso $\mathcal{U}$ di X. Le (ulteriori) patologie osculatorie di X sono misurate dall'abbassamento del rango di $j_{k,x}$ per $x \in X \setminus \mathcal{U}$. In particolare, se X è uno scroll, è immediato constatare che $\dim(\mathrm{Osc}_x^2(X)) \leq 4$ per ogni $x \in X$. Ciò a sua volta comporta che $\dim(\mathrm{Osc}_x^k(X)) \leq 2k$ per ogni intero k con $1 \leq k \leq \left[\frac{N-1}{2}\right]$. È di interesse conoscere quando le disuguaglianze precedenti siano delle uguaglianze, cioè sapere quando lo scroll non presenta ulteriori patologie osculatorie.

Più in generale, una congettura di Piene e Tai [PT] afferma che se $X \subset \mathbf{P}^N$, $N \geq 5$, è una superficie non genericamente 2-regolare, tale che in ogni punto $x \in X$ risulti

$$\dim(\mathrm{Osc}_x^m(X)) = 2m \quad \text{dove } m = \left[\frac{N-1}{2}\right], \tag{\#}$$

allora sussiste uno dei casi seguenti:

(i) $N = 2m+1$ e X è uno scroll razionale normale bilanciato, cioè $X = \mathbb{F}_0$, $L = [C_0 + mf]$, $V = H^0(X, L)$, oppure

(ii) $N = 2m+2$ e X è uno scroll razionale normale semibilanciato, cioè $X = \mathbb{F}_1$, $L = [C_0 + (m+1)f]$, $V = H^0(X, L)$.

Qui $\mathbb{F}_e$ denota la superficie di Segre–Hirzebruch di invariante e, mentre C_0 e f ne rappresentano una sezione fondamentale ed una fibra, rispettivamente.

Per N dispari la congettura è stata dimostrata da Piene e Tai per $m \leq 4$ [PT] e, successivamente, da Ballico, Piene e Tai, in generale [BPT]. Per N pari essa è rimasta aperta. In questa tesi si dimostra che essa è falsa; si prova infatti che esistono altre superfici che verificano (#), oltre a quelle indicate in **(ii)**. Sia B una curva ellittica e sia $\mathcal{E}$ il fibrato vettoriale di rango 2 su B definito dalla estensione non banale

$$0 \to \mathcal{O}_B \to \mathcal{E} \to \mathcal{L} \to 0,$$

dove $\mathcal{L}$ è un fibrato lineare di grado 1 su B. La superficie $X = \mathbf{P}(\mathcal{E})$ è la rigata geometrica ellittica di invariante -1. Siano $\pi : X \to B$ la proiezione, $\xi_{\mathcal{E}}$ il fibrato lineare tautologico su X e δ un divisore su B di grado $m+1 \geq 3$. Si dimostra il

Teorema 1 *Sia X come sopra e sia $L = \xi_{\mathcal{E}} \otimes \pi^*\mathcal{O}_B(\delta)$. Allora X, immersa in $\mathbf{P}^{2m+2}$ dal sistema lineare completo $|L|$, soddisfa la condizione (#).*

L'idea della dimostrazione si può sintetizzare così. Innanzitutto lo spazio lineare $\mathbf{P}(\mathrm{Ker}(j_{m,x}))$ degli iperpiani m-osculatori ad X in x si identifica con il sistema lineare $|L-(m+1)x|$ delle sezioni iperpiane di X aventi un punto di molteplicità $\geq (m+1)$ in x. Si dimostra che tali sezioni sono quelle della forma $H = mf_x + R$, dove f_x denota la fibra di X per x ed R è un divisore effettivo del sistema lineare $|L - mf_x|$ contenente x. Dunque $|L-(m+1)x|$ si può identificare, a sua volta, con il sottosistema lineare $\mathcal{S}_x = |L - mf_x - x|$ di

$|L - mf_x|$ e la condizione (#) si traduce nel fatto che $\mathcal{S}_x$ abbia codimensione 1. Ma quest'ultima condizione risulta soddisfatta perché il fibrato lineare $L - mf_x$ è globalmente generato, come il teorema di Reider, combinato con le proprietà intrinseche di X, consente di dimostrare.

Nella tesi si mostra, inoltre, che la patologia 2-osculatoria di tutti gli scroll è abbastanza benigna, nel senso precisato dal

Teorema 2 *Sia $X \subset \mathbf{P}^N$, $N \geq 5$, uno scroll su una curva liscia. Allora*

$$\dim(\mathrm{Osc}^2_x(X)) \geq 3 \quad \text{per ogni } x \in X.$$

Il risultato non è ovvio in quanto esistono superfici per le quali lo spazio osculatore in qualche punto si riduce al piano tangente, come mostra un esempio scoperto da Togliatti [T] e riconsiderato recentemente da Lanteri e Mallavibarrena [LM2]. Questo risultato è ottenuto attraverso un approfondimento del metodo descritto più sopra per trasformare il problema nel calcolo delle dimensioni di opportuni sistemi lineari non necessariamente completi.

La tesi è così organizzata. Dopo aver presentato il materiale di base, nel Cap. I si studia il secondo spazio osculatore delle superfici e si illustrano i vari comportamenti patologici, dagli scroll (Teorema 2) all'esempio di Togliatti. Nel Cap. II si ridimostra la congettura di Piene–Tai per N dispari, utilizzando gli sviluppi della teoria dell'aggiunzione (teorema di Sommese–Van de Ven) successivi a quelli applicati nella dimostrazione originaria data in [PT] e [BPT]. Il Cap. III è dedicato alle superfici geometricamente rigate ellittiche. Dopo aver presentato i controesempi alla congettura di Piene–Tai in dimensione pari (Teorema 1), si studia il comportamento osculatorio degli scroll ellittici di invariante $e \geq 0$ e di altri modelli proiettivi della rigata di invariante -1.

Hanno carattere di originalità il Cap. III, il §5 del Cap. I ed alcune osservazioni nel Cap. II.

Materiale di base

0.1 Notazioni e richiami

Con il termine *superficie* intenderemo sempre una varietà analitica complessa liscia di dimensione 2 che ammette un'embedding in uno spazio proiettivo $\mathbf{P}^N$. Per una superficie S si definiscono i seguenti invarianti topologici:
$b_i(S) = \dim_{\mathbf{R}} H^i(S, \mathbf{R})$, i *numeri di Betti* di S;
$e(S) = \sum_i (-1)^i b_i$, la sua *caratteristica topologica di Eulero-Poincaré*.
Un *divisore* $D \in \mathrm{Div}(S)$ su una superficie S è una somma finita $D = \sum_i a_i C_i$, dove C_i sono curve irriducibili contenute in S e $a_i \in \mathbf{Z}$. Il divisore D si dice *effettivo* se tutti i coefficienti a_i sono positivi. Se $D, D' \in \mathrm{Div}(S)$, indichiamo con DD' l'*indice di intersezione* dei divisori D e D' e con D^2 l'*autointersezione* di D.
Un *fibrato lineare olomorfo* su S è un elemento ξ del primo gruppo di coomologia $H^1(S, \mathcal{O}_S^*)$ del fascio $\mathcal{O}_S^*$ delle funzioni olomorfe prive di zeri su S. Indichiamo con
$\mathcal{O}_S(\xi)$, il fascio delle sezioni olomorfe di ξ;
$H^q(\xi) = H^q(S, \mathcal{O}_S(\xi))$, il q-esimo spazio vettoriale di coomologia di S a coefficienti in $\mathcal{O}_S(\xi)$;
$h^q(\xi) = h^q(\mathcal{O}_S(\xi)) = \dim_{\mathbf{C}} H^q(\xi)$;
$\chi(\xi) = \chi(\mathcal{O}_S(\xi)) = h^0(\xi) - h^1(\xi) + h^2(\xi)$, la caratteristica di Eulero del fascio $\mathcal{O}_S(\xi)$.
Indicheremo con $\mathcal{O}_S(D)$, $h^q(D)$, $\chi(D)$ i corrispondenti oggetti relativi al fibrato lineare $[D]$ associato al divisore D. Indicando con K_S un divisore canonico di S, si introducono i seguenti invarianti birazionali:
$p_g(S) = h^0(K_S)$ il *genere geometrico* di S;
$P_n(S) = h^0(nK_S)$ l'n-esimo *plurigenere* di S;
$q(S) = h^1(\mathcal{O}_S)$ l'*irregolarità* di S.
In particolare $\chi(\mathcal{O}_S) = 1 - q + p_g$.

Nel gruppo dei divisori si possono introdurre le seguenti relazioni di equivalenza.

- *Equivalenza lineare*: due divisori $D, D' \in \mathrm{Div}(S)$ si dicono *linearmente equivalenti*, $D \sim D'$, se la loro differenza $D - D'$ è un divisore associato a una funzione meromorfa f su S. Il gruppo quoziente $\mathrm{Pic}(S) = \frac{\mathrm{Div}(S)}{\sim}$ si chiama gruppo di Picard di S ed è isomorfo al primo gruppo di coomologia $H^1(S, \mathcal{O}_S^*)$ del fascio $\mathcal{O}_S^*$.

- *Equivalenza algebrica*: i divisori D, D' si dicono *algebricamente equivalenti*, $D \sim_{alg} D'$, se esiste una famiglia algebrica di divisori $\{D_t\}$ parametrizzata da una curva irriducibile $C \subset S$ e due punti $t_1, t_2 \in C$, tali che $D_{t_1} = D$ e $D_{t_2} = D'$.

- *Equivalenza in coomologia*: sia $c : H^1(S, \mathcal{O}_S^*) \to H^2(S, \mathbf{Z})$ l'omomorfismo indotto in coomologia dalla successione esatta

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_S^* \to 0.$$

  I divisori $D, D' \in \mathrm{Pic}(S)$ si dicono *omologicamente equivalenti* se $c(D) = c(D')$. Il gruppo quoziente rispetto a tale relazione di equivalenza si denota con $\mathrm{NS}(S)$ e si chiama gruppo di Neron-Severi.

- *Equivalenza numerica*: i divisori $D, D' \in \mathrm{Div}(S)$ si dicono *numericamente equivalenti*, $D \equiv D'$, se risulta $DC = D'C$ per ogni curva irriducibile C contenuta in S. Il gruppo quoziente si denota con $\mathrm{Num}(S) = \frac{\mathrm{Div}(S)}{\equiv}$.

Osserviamo che queste relazioni di equivalenza si implicano in questo ordine: equivalenza lineare $\to$ algebrica $\to$ omologica $\to$ numerica. [Ha1]

Un *sistema lineare* è il proiettivizzato $\mid V \mid = \mathbf{P}(V)$ di un sottospazio lineare $V \subseteq H^0(D)$, dove D è un divisore sulla superficie S ; quando $V = H^0(D)$, allora $\mid V \mid = \mid D \mid = \mathbf{P}(H^0(D))$ si dice *sistema lineare completo*. Data una base $(s_0, \ldots, s_N)$ di V, possiamo definire un'applicazione razionale

$$\varphi_V : S \dashrightarrow \mathbf{P}^N,$$

con $N = \dim \mid V \mid = \dim V - 1$, che associa ad ogni punto $p \in S$ il punto definito dalla $(N+1)$-upla di coordinate proiettive $(s_o(p) : \ldots : s_N(p))$. Tale mappa è un morfismo se e solo se $\mid V \mid$ è privo di punti base. Il fascio $\mathcal{O}_S(D)$ (o equivalentemente il fibrato $[D]$) si dice *spanned* se $\mid D \mid$ è privo di punti base, cioè quando $\varphi_{|D|}$ è un morfismo. Il sistema lineare $\mid V \mid$ si dice *molto ampio* se $\varphi_{|V|}$ è un'embedding. Naturalmente se $\mid V \mid$ è molto ampio, anche $\mid D \mid$ lo è. Per indicare che $\mid D \mid$ è molto ampio possiamo dire anche che il divisore D è molto ampio. D si dice *ampio* se esiste un intero $n > 0$ tale che nD sia molto ampio. Un divisore D si dice *nef* (o *numericamente effettivo*) se $DC \geq 0$ per ogni curva irriducibile C contenuta in S. Osserviamo che se un fibrato lineare $[D]$ è spanned, allora il divisore D è nef, perché per ogni curva irriducibile si ha

$$DC = \deg \varphi_{[D]}(C) \geq 0.$$

Teorema 0.1.1 (Nakai-Moishezon) *Un divisore D su una superficie S è ampio se e solo se $D^2 > 0$ e $DC > 0$ per ogni curva irriducibile C contenuta in S.*

Dimostrazione: Si veda [Ha2, Ch. V, Theorem 1.10].

Si noti, inoltre, che se $\mid V \mid$ è privo di punti base,

$$\dim \mid V - x \mid = \dim \mid V \mid -1$$

per ogni $x \in S$ e se $\mid V \mid$ è molto ampio,

$$\dim \mid V - x - y \mid = \dim \mid V \mid -2$$

per ogni $x, y \in S$. Sia, inoltre, τ_x un vettore tangente ad S in x e denotiamo con $\mid V - x - \tau_x \mid$ l'insieme delle sezioni $s \in \mid V \mid$ che si annullano in x e il cui luogo degli zeri $(s)_0$ ha τ_x come tangente in x. Si ha allora

$$\dim \mid V - x - \tau_x \mid = \dim \mid V \mid -2.$$

Valgono i seguenti risultati fondamentali:

Teorema di annullamento di Kodaira: Se L è un fibrato lineare ampio su S e K_S è un divisore canonico della superficie, allora

$$h^1(L + K_S) = h^2(L + K_S) = 0.$$

Teorema di Riemann-Roch: Sia S una superficie e $D \in \mathrm{Div}S$,

$$\chi(D) = \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(D^2 - DK_S).$$

Formula del genere: Sia C una curva irriducibile contenuta in S. Se definiamo il *genere aritmetico* di C come $p_a(C) = h^1(\mathcal{O}_C)$, si ha

$$p_a(C) = 1 + \frac{1}{2}(C^2 + CK_S).$$

Inoltre se C è liscia, il genere aritmetico coincide con il genere geometrico della curva. Quando $S \subset \mathbf{P}^N$ è una superficie proiettiva, si può identificare con la coppia (S, V), ponendo $\mathbf{P}^N = \mathbf{P}(V)$ dove $V \subseteq H^0(L)$, e $L = (\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}(1))_S$. Definiamo *genere sezionale* di S il genere $p_a(L)$ della sezione iperpiana.

0.2 Superfici rigate e geometricamente rigate

Una superficie S si dice *rigata* (o *birazionalmente rigata*) se S è birazionalmente equivalente a $C \times \mathbf{P}^1$ dove C è una curva liscia. Se $C = \mathbf{P}^1$, S si dice *razionale*.
Per una tale superficie, si dimostra che:
$q(S) = g(C)$;
$p_g(S) = 0$;
$P_n(S) = 0$ per ogni $n \geq 2$.
Una superficie S si dice *geometricamente rigata* (o $\mathbf{P}^1$-bundle) di base B, dove B è una curva liscia, se esiste un morfismo suriettivo $\pi : S \to B$ la cui fibra $\pi^{-1}(b)$ è isomorfa a $\mathbf{P}^1$ per ogni $b \in B$.
Se S è geometricamente rigata di base B, allora esiste un fibrato vettoriale olomorfo $\mathcal{E}$ di rango 2 su B, tale che $S = \mathbf{P}(\mathcal{E})$. Si ha che $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ è isomorfo a $\mathbf{P}(\mathcal{E}')$ se e solo se $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}$, con $\mathcal{L}$ fibrato lineare su B. E' possibile scegliere $\mathcal{E}$ in modo che sia *normalizzato*, cioè tale che $H^0(\mathcal{E}) \neq 0$, ma per ogni $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(B)$ con $\deg\mathcal{L} < 0$ sia $H^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}) = 0$. In questo caso $e := -\deg \mathcal{E}$ è detto invariante di $S = \mathbf{P}(\mathcal{E})$. Risulta $e \geq -q$ (disuguaglianza di Nagata)[N].
Esiste una sezione $\sigma : B \to S$ con immagine C_0, tale che $[C_0] = \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(1)$ è il fibrato tautologico di $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ [SS, Ch. V]. Essa è detta *sezione fondamentale* di S e si può verificare che:
$C_0^2 = -e$;
$\mathrm{Pic}(S) \cong \mathbf{Z} \oplus \pi^*\mathrm{Pic}B$, dove $\mathbf{Z}$ è generato da C_0;
$\mathrm{Num}(S) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, generato dalle classi di C_0 e di una fibra f;
$[K_S] = [C_0]^{-2} \otimes \pi^*([K_B] \otimes \det\mathcal{E})$, [SS, pag. 107],
da cui si ha
$K_S \equiv -2C_0 + (2q - 2 - e)f$.

Diamo ora una caratterizzazione delle curve irriducibili, dei divisori ampi e dei divisori nef su una superficie geometricamente rigata S di invariante e.

Proposizione 0.2.1 *Se $C \equiv aC_0 + bf$ è una curva irriducibile diversa da C_0 e da una fibra, allora*

$$a > 0, b \geq ae \text{ se } e \geq 0;$$

$$a = 1, b \geq 0 \text{ oppure } a \geq 2, b \geq ae/2 \text{ se } e < 0.$$

Proposizione 0.2.2 *Un divisore $D \equiv aC_0 + bf$ è ampio se e solo se*

$$a > 0, b > ae \text{ se } e \geq 0;$$

$$a > 0, b > ae/2 \text{ se } e < 0.$$

Dimostrazione di 0.2.1 e 0.2.2: Si veda [Ha2, Ch. V, Proposition 2.20 e 2.21].

Proposizione 0.2.3 (Maeda) *Un divisore $D \equiv aC_0 + bf$ è nef se e solo se*

$$a > 0, b \geq ae \text{ se } e \geq 0;$$

$$a > 0, b \geq ae/2 \text{ se } e < 0.$$

Dimostrazione: Si veda [M].

Proposizione 0.2.4 *Sia $S = \mathbf{P}_B(\mathcal{E})$, dove B è una curva liscia e $\mathcal{E}$ un fibrato vettoriale olomorfo di rango 2 su B. Sia $\delta \in Pic(B)$ e $[C_0]$ il fibrato tautologico di S. Per ogni $q, m \geq 0$, allora, vale la relazione*

$$H^q(S, [C_0]^m \otimes \pi^*\delta) = H^q(B, S^m\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_B(\delta)),$$

dove $S^m\mathcal{E}$ indica l'm-esima potenza simmetrica di $\mathcal{E}$.

Dimostrazione: Si veda [SS, pag. 103].

0.3 Scroll

Sia S una superficie geometricamente rigata, $L \in \mathrm{Pic}(S)$, $V \subseteq H^0(L)$ e $\mid V \mid$ il corrispondente sistema lineare (in generale non completo).

Definizione 0.3.1 *Si dice che (S, V) è uno* scroll *se $\mid V \mid$ è molto ampio e se per ogni fibra f di S si ha $L_f \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)$. Si dice che lo scroll (S, V) è* (linearmente) normale *quando $\mid V \mid$ è completo.*

Questa definizione descrive gli scroll in modo astratto come superfici polarizzate. Nella terminologia classica, invece, per scroll si intende la superficie S immersa nello spazio proiettivo, secondo la seguente

Definizione 0.3.2 *Dati S e V come sopra, poiché V è molto ampio si ha l'embedding associata*

$$\varphi_V : S \hookrightarrow \mathbf{P}(V)$$

e l'immagine $\varphi_V(S)$ è uno scroll *se e solo se le fibre di S sono immerse come rette in $\mathbf{P}(V)$, cioè se $Vf = 1$.*

Osservazione 0.3.3 *Le due definizioni precedenti di scroll sono equivalenti.*

Dimostrazione: Dobbiamo solo mostrare che se S è uno scroll immerso in uno spazio proiettivo $\mathbf{P}(W)$ attraverso l'embedding j secondo la definizione 0.3.2, allora (S, W) è anche uno scroll secondo la definizione 0.3.1. Ponendo, infatti, $L := (\mathcal{O}_{\mathbf{P}(W)}(1))_S \in \mathrm{Pic}(S)$, otteniamo $W \subseteq H^0(L)$ e $j = \varphi_W$ e si verifica subito che (S, W) è uno scroll. $\square$

Introduciamo, ora, un lemma che esprime una proprietà degli scroll e che ci sarà utile in seguito.

Lemma 0.3.4 *Dato uno scroll (S, V), se una sezione iperpiana $H \in \mid V \mid$ ha un punto doppio in x, allora $H = f_x + R$, dove f_x è la fibra passante per x e $x \in R$.*

Dimostrazione: Indichiamo con $\nu_x(C)$ la molteplicità del punto x sulla curva C. Per assurdo H non contenga la fibra f_x. Possiamo scrivere, quindi, H come somma di divisori irriducibili diversi dalla fibra f_x:

$$H = \sum A_i, \text{ con } A_i \text{ irriducibile e } A_i \neq f_x \text{ per ogni } i.$$

Poiché (S, V) è uno scroll, le fibre sono rette e $fH = fL = 1$, quindi

$$1 = f_x H = \sum A_i f_x \geq \sum \nu_x(A_i)\nu_x(f_x) = \sum \nu_x(A_i).$$

Abbiamo ora 2 casi: (i) esiste un'unica componente, ad esempio A_1, che contiene il punto x, oppure (ii) il punto x appartiene a più di una componente A_i. Nel primo caso $\nu_x(A_1) \geq 2$ perché H ha un punto doppio in x e quindi avremmo dalla formula precedente $1 \geq 2$, che è assurdo. Nel secondo caso, ciascuna delle componenti che contengono x ha molteplicità almeno 1 e quindi avremmo ancora $1 \geq 2$, cioè un assurdo. □

Lemma 0.3.5 *Sia (S, V) uno scroll, se una sezione iperpiana $H \in \mid V \mid$ ha in x un punto di molteplicità m, allora $H = (m-1)f_x + R$, dove f_x è la fibra passante per x e $x \in R$.*

Dimostrazione: Applicando ricorsivamente il procedimento utilizzato nella dimostrazione precedente, si ottiene subito l' enunciato. □

0.4 Alcuni risultati relativi alle superfici

Sia X una varietà proiettiva non iperpiana contenuta in $\mathbf{P}^N$ di dimensione n e sia H una generica sottovarietà di $\mathbf{P}^N$ di dimensione $N - n$, si definisce, allora, *grado* di X, e si denota con $\deg X$, il numero di punti in cui H interseca X. Si dimostra che

$$\deg X \geq \operatorname{codim} X + 1,$$

dove $\operatorname{codim} X$ denota la codimensione di X in $\mathbf{P}^N$. Le varietà tali che

$$\deg X = \operatorname{codim} X + 1$$

sono dette *varietà di grado minimo.*
Classificazione delle superfici di grado minimo (Bertini, Del Pezzo): Se $S \subset \mathbf{P}^N$ è una superficie linearmente normale di grado minimo, cioè se $\deg S = N - 1$, allora

(i) S è la superficie di Veronese, cioè $S = \varphi_{|L|}(\mathbf{P}^2)$, dove $L = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(2)$, oppure

(ii) S è uno scroll razionale normale, cioè una superficie geometricamente rigata con base $B = \mathbf{P}^1$ e immersa come scroll normale.

Enunciamo, ora, alcuni risultati di teoria delle superfici algebriche. Ricordiamo che per una superficie S si definisce l'n-esimo plurigenere $P_n(S) = h^0(nK_S)$, dove K_S è il fibrato canonico di S.

Teorema 0.4.1 (Enriques) *Sia S una superficie tale che $P_{12}(S) = 0$. Allora S è birazionalmente rigata.*

Dimostrazione: Si veda [B, Theorem VI.17].

Siano ora S una superficie e $\mathcal{B}(S)$ l'insieme delle classi di isomorfismo delle superfici birazionalmente equivalenti a S. In $\mathcal{B}(S)$ consideriamo la seguente relazione d'ordine parziale: $S_1 \geq S_2$ (S_1 domina S_2) se esiste un morfismo birazionale $\eta : S_1 \to S_2$. Gli elementi minimali in $\mathcal{B}(S)$ rispetto a tale relazione sono detti *modelli minimali* di S.
Lemma chiave della teoria delle superfici: Sia S una superficie minimale e sia K_S il suo fibrato canonico. Se K_S è non nef, allora S è birazionalmente rigata.

0.5 Risultati di teoria dell'aggiunzione

Teorema 0.5.1 (Reider) [R] *Siano S una superficie, M un suo divisore nef e K un divisore canonico di S.*
(a) *Se $M^2 \geq 5$ e il sistema lineare $\mid K + M \mid$ ha un punto base in $p \in S$, allora esiste un divisore effettivo D, con $p \in D$, tale che valga una delle due possibilità:*
(i) $DM = 0$, $D^2 = -1$;
(ii) $DM = 1$, $D^2 = 0$.
(b) *Se $M^2 \geq 10$ e il sistema lineare $\mid K + M \mid$ non separa i punti $p, q \in S$ (cioè ogni divisore appartenente al sistema che contiene uno dei due punti contiene anche l'altro), allora esiste un divisore effettivo D, con $p, q \in D$, tale che valga una delle seguenti possibilità:*
(i) $DM = 0$, $D^2 = -1$ o -2;
(ii) $DM = 1$, $D^2 = 0$ o -1;
(iii) $DM = 2$, $D^2 = 0$.

Teorema 0.5.2 [So, V] *Sia S una superficie, L un suo divisore molto ampio e K un divisore canonico di S; allora il fibrato $[L + K]$ è spanned a meno che* *(i)* $(S, L) = (\mathbf{P}^2, \mathcal{O}(1))$ *oppure* $(S, L) = (\mathbf{P}^2, \mathcal{O}(2))$, *cioè sia il piano proiettivo o la superficie di Veronese*

(ii) (S, L) *sia uno scroll.*

Introduciamo ora il fondamentale teorema sulla mappa di aggiunzione dovuto a Sommese e Van de Ven. Sia S una superficie, L un suo divisore molto ampio e K un suo divisore canonico. Supponiamo che il fibrato aggiunto $[K + H]$ sia spanned e che il morfismo associato abbia immagine 2-dimensionale. Sia (S', L') la riduzione di (S, L), dove $r : S \to S'$ contrae tutte le rette eccezionali. Diciamo che S' è una riduzione semplice se r contrae una sola retta eccezionale. Si chiama superficie di Del Pezzo una superficie con $-K$ ampio.

Teorema 0.5.3 (Sommese–Van de Ven) [SV] *Siano* (S, L) *e* (S', L') *come sopra, allora* $K_{S'} + L$ *è molto ampio a meno che*

(i) (S, L) *sia una superficie di Del Pezzo con* $K^2 = 2$ *e* $L = -2K$;

(ii) (S, L) *ammetta una riduzione semplice* (S', L') *uguale alla superficie descritta in (i);*

(iii) (S, L) *sia una superficie di Del Pezzo con* $K^2 = 1$ *e* $L = -3K$;

(iv) (S, L) *sia una superficie geometricamente rigata ellittica di invariante* -1 *e con* $L \equiv 3C_0$.

0.6 Classi di Chern di un fibrato vettoriale

Dato un fibrato vettoriale olomorfo E di rango r su una varietà complessa X di dimensione n, le *classi di Chern* $c_i(E)$ di E sono opportune classi di coomologia in $H^{2i}(X, \mathbf{Z})$, dove $i = 0, \ldots, \min(r, n)$. Il polinomio

$$c_t(E) = c_0(E) + c_1(E)t + c_2(E)t^2 + \ldots$$

è detto *polinomio di Chern*. La definizione assiomatica delle classi di Chern è dovuta a Grothendieck e si basa sulle seguenti tre proprietà [Ha2, O]:
1) Se L è un fibrato lineare, allora $c_1(L) = c(L)$, dove c è l'omomorfismo

$$c : H^1(X, \mathcal{O}^*) \to H^2(X, \mathbf{Z})$$

indotto in coomologia dalla successione esatta

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^* \to 0.$$

2) Per ogni morfismo $f : Y \to X$ tra varietà, si ha la proprietà di funtorialità

$$f^* c_t(E) = c_t(f^* E).$$

dove f^* indica l'applicazione $H^*(X, \mathbf{Z}) \to H^*(Y, \mathbf{Z})$ indotta in coomologia da f e f^*E è il pull-back del fibrato E.
3) Se la successione di fibrati vettoriali su X

$$0 \to E \to F \to G \to 0$$

è esatta, allora la *formula di Whitney* afferma che

$$c_t(F) = c_t(E) c_t(G).$$

In particolare tale formula si applica quando $F \cong E \oplus G$.

Ricordiamo, ora, alcuni risultati che si possono ricavare da questa definizione e che utilizzeremo in seguito:
$\deg c_t(E) \leq \min(r, n)$;
il polinomio di Chern di E si decompone formalmente come prodotto di fattori lineari $c_t(E) = (1 + a_1 t) \dots (1 + a_m t)$, dove $m = \min(r, n)$ e le radici a_i sono dette *radici di Chern* di E;
$c_t(E^\vee) = c_{-t}(E)$, quindi $c_i(E^\vee) = (-1)^i c_t(E)$, dove $E^\vee$ denota il duale di E;
$c_t(E \otimes F) = \prod_{i,j}(1 + (a_i + b_j)t)$, dove a_i e b_j sono le radici di Chern di E e di F, rispettivamente. Se, in particolare, $F = L$ è lineare si ricava la formula seguente

$$c_i(E \otimes L) = \sum_{j=0}^{i} \binom{r-j}{i-j} c_j(E) c_1(L)^{i-j};$$

se E ha rango 2 abbiamo

$$c_1(S^k E) = \binom{k+1}{2} c_1(E),$$

$$c_2(S^k E) = \frac{1}{24} k(k^2 - 1)(3k + 2) c_1(E)^2 + \frac{1}{6} k(k + 1)(k + 2) c_2(E),$$

dove $S^k E$ indica la k-esima potenza simmetrica di E ed è un fibrato vettoriale di rango $k + 1$.
Si definisce, inoltre, $c_i(X) = c_i(T_X)$ dove T_X è il fibrato tangente di X, e vale

il teorema di Gauss-Bonnet, per cui $c_n(X) = e(X)$. Quando $X = S$ è una superficie abbiamo, in particolare,

$$c_1(\Omega^1_S) = -c_1(T_S) = K_S,$$

$$c_2(\Omega^1_S) = c_2(T_S) = e(S).$$

Capitolo 1

Spazi osculatori di superfici proiettive e patologie relative

1.1 Superfici geometricamente rigate razionali

Sia S una superficie geometricamente rigata sulla base $B = \mathbf{P}^1$. Poiché $q(S) = g(B) = 0$, si ha $e \geq 0$ e si dimostra il seguente

Teorema 1.1.1 *Per ogni $e \geq 0$, esiste una e una sola superficie geometricamente rigata su $\mathbf{P}^1$ di invariante e ed essa si ottiene come proiettivizzato di $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-e)$.*

Dimostrazione: Si veda [Ha2, Ch. V, Corollary 2.13].

Per ogni $e \geq 0$, indichiamo con $\mathbb{F}_e = \mathbf{P}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-e))$ tale superficie, detta *superficie di Segre-Hirzebruch di invariante e*. Quando vengono immerse come scroll attraverso un sistema lineare completo, tali superfici sono dette *scroll razionali normali* e sono particolari varietà di grado minimo, cioè di grado d in $\mathbf{P}^{d+1}$. In particolare se $e = 0$ lo scroll si dice *bilanciato*, se $e = 1$ si dice *semibilanciato*.
Descriviamo, ora, i modelli proiettivi dello scroll razionale normale di invariante e: si considerino due curve razionali normali di grado d_1 e d_2, con $d_1 \geq d_2 \geq 1$ e $d_1 - d_2 = e$, immerse rispettivamente negli spazi proiettivi sghembi $\mathbf{P}^{d_1}$ e $\mathbf{P}^{d_2}$ contenuti in $\mathbf{P}^{d_1+d_2+1}$. Consideriamo un isomorfismo tra le

due curve e l'unione delle rette che congiungono punti corrispondenti rispetto all'isomorfismo dato. Tali rette generano una superficie di grado $d_1 + d_2$ immersa in $\mathbf{P}^{d_1+d_2+1}$, che costituisce il modello proiettivo dello scroll normale razionale.

1.2 Spazi osculatori di varietà proiettive

Sia $X \subset \mathbf{P}^N = \mathbf{P}(V)$ una varietà liscia non iperpiana di dimensione $m \geq 2$ e $L := (\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}(1))_X$ il suo fibrato iperpiano. Con $J_k L$ indichiamo per ogni k il *k-esimo fibrato in getti* (o jet-bundle) di L, ovvero il fascio delle parti principali di ordine k del fibrato lineare L.
Per ogni $k \geq 1$ possiamo considerare la proiezione naturale

$$J_k L \to J_{k-1} L,$$

e la corrispondente successione esatta di fasci

$$0 \to S^k \Omega_X^1 \otimes L \to J_k L \to J_{k-1} L \to 0$$

dove Ω_X^1 è il fibrato cotangente di X e S^k denota la k-esima potenza simmetrica.
Su ogni varietà X abbiamo per ogni k l'omomorfismo di fasci

$$j_k : V \otimes \mathcal{O}_X \to J_k L$$

che per ogni punto x di X associa ad una sezione $s \in V \subseteq H^0(X, L)$ il suo sviluppo di Taylor arrestato all'ordine k (detto *k-getto*) valutato in x.

Definizione 1.2.1 *Si definisce k-esimo* spazio osculatore *a X in x lo spazio* $\mathrm{Osc}_x^k(X) := \mathbf{P}(\mathrm{Im} j_{k,x})$. *Un iperpiano $H \subset \mathbf{P}^N$ si dice* iperpiano k-osculatore *a X in x se esso contiene* $\mathrm{Osc}_x^k(X)$.

Proposizione 1.2.2 *H è un iperpiano k-osculatore a X in un punto $x \in X$ se e solo se H è il divisore associato alla sezione $s \in Ker\ j_{k,x} \subset V$.*

Dimostrazione: Osserviamo prima di tutto che, poiché $\mathbf{P}^N = \mathbf{P}(V)$ è lo spazio proiettivo degli iperpiani vettoriali di V, si ha che $\mathbf{P}^{N\vee} = \mid V \mid$ e quindi un iperpiano H di $\mathbf{P}^N$ si identifica con il divisore associato a una sezione s di V. Fissiamo un punto $x \in X$; se si dualizza la mappa suriettiva

$$j_{k,x} : V \to \mathrm{Im} j_{k,x},$$

si ottiene l'inclusione

$$i_x : (\mathrm{Im} j_{k,x})^\vee \hookrightarrow V^\vee,$$

che, riletta a livello proiettivo, significa

$$\mathrm{Osc}^k_x(X) = \mathbf{P}(\mathrm{Im} j_{k,x}) \subset \mathbf{P}^N.$$

Un iperpiano H in $\mathbf{P}^N$ è, per definizione, k-osculatore a X in x se e solo se contiene $\mathrm{Osc}^k_x(X)$, cioè se e solo se, visto come funzionale sui punti di $\mathbf{P}^N$, esso annulla gli elementi che appartengono all'immagine di i_x. D'altra parte sappiamo che

$$\mathrm{Ann}(\mathrm{Im} i_x) = \mathrm{Ker}(i_x)^\vee = \mathrm{Ker} j_{k,x},$$

dove con $(i_x)^\vee$ indichiamo l'omomorfismo trasposto di i_x, e pertanto H è k-osculatore se e solo se $H = (s)_0 \in \mid V \mid$ con $s \in \mathrm{Ker} j_{k,x}$. □

Osserviamo che quest'ultima condizione equivale a richiedere che s si annulli nel punto x con tutte le sue derivate parziali fino all'ordine k, cioè che la sezione tagliata da H su X abbia in x un punto singolare di molteplicità maggiore o uguale a $k+1$.

Sia

$$s_k + 1 = \max_{x \in X} \mathrm{rk}(j_{k,x})$$

e $\mathcal{U}$ sia l'aperto denso dei punti di X in cui il rango di $j_{k,x}$ è pari a $s_k + 1$.

Definizione 1.2.3 *Si definisce* k-esima varietà duale *di X, e si indica con $X_k^\vee$, la chiusura in $\mathbf{P}^{N\vee}$ dell'insieme degli iperpiani k-osculatori ad X nei punti di $\mathcal{U}$, cioè*

$$X_k^\vee = \overline{\{H \in \mathbf{P}^N \mid H \supseteq \mathrm{Osc}^k_x(X), x \in \mathcal{U}\}}.$$

Se j_k è suriettivo si dice che (X, V) è *k-regolare* e in tal caso la dimensione del k-esimo spazio osculatore $\mathrm{Osc}^k_x(X)$ è $\begin{pmatrix} k+m \\ m \end{pmatrix} - 1$ per ogni $x \in X$, dove $m = \dim X$. In generale per ogni punto dell'aperto denso $\mathcal{U}$ lo spazio osculatore ha dimensione costante s_k. Chiamiamo *punti di iperosculazione* quelli in cui la dimensione dello spazio osculatore è $< s_k$.

Sia ora K_k il nucleo della mappa

$$V \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{U}} \to (J_k L)_{\mathcal{U}}$$

Notiamo che K_k è un fibrato vettoriale e dunque il suo rango è costante su $\mathcal{U}$. Si ha, allora

$$\mathbf{P}(K_k^\vee) = \{(x,H) \mid H \supseteq \mathrm{Osc}_x^k\} \subset X \times \mathbf{P}^{N\vee} = X \times \mid V \mid$$

e $X_k^\vee$ coincide con la seconda proiezione della chiusura di $\mathbf{P}(K_k^\vee)$.
In sintesi:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{U}\times \mid V \mid & \subset & X\times \mid V \mid & \stackrel{q}{\to} & \mid V \mid \\ \cup & & \cup & & \cup \\ \mathbf{P}_{\mathcal{U}}(K_k^\vee) & \subset & \overline{\mathbf{P}_{\mathcal{U}}(K_k^\vee)} & \to & X_k^\vee \end{array}.$$

Indichiamo con π_k la restrizione della proiezione q a $\overline{\mathbf{P}_{\mathcal{U}}(K_k^\vee)}$. Poiché

$$\dim \mathbf{P}_{\mathcal{U}}(K_k^\vee) = \dim \mathcal{U} + \dim V - \mathrm{rk} j_{k,x} - 1,$$

si ha

$$\dim X_k^\vee \leq \dim \mathbf{P}_{\mathcal{U}}(K_k^\vee) = m + N - s_k - 1.$$

$X_k^\vee$ si dice *degenere* se la sua dimensione è inferiore alla dimensione massima attesa.

Definizione 1.2.4 *Sia $\overline{k}$ il più grande intero tale che $s_{\overline{k}} < N$, $s_k < s_{\overline{k}}$ per ogni $k < \overline{k}$ e $Imj_{\overline{k}}$ non banale; chiameremo, allora,* varietà duale stretta *la varietà duale di ordine $\overline{k}$ e la indicheremo con $X^* := X_{\overline{k}}^\vee$.*

Sia ora X una superficie. A partire dalla successione esatta di fasci già descritta

$$0 \to S^k\Omega_X^1 \otimes L \to J_kL \to J_{k-1}L \to 0,$$

si possono dimostrare, per ogni k, le seguenti formule per il calcolo delle classi di Chern del k-esimo jet-bundle su X [LM1]:

$$c_1(J_kL) = \left(\begin{array}{c} 2+k \\ 3 \end{array}\right) K_X + \left(\begin{array}{c} 2+k \\ 2 \end{array}\right) L;$$

$$c_2(J_kL) = \frac{1}{3}\left(\begin{array}{c} 3+k \\ 4 \end{array}\right)((k^2-1)K_X^2 + 6kK_XL + 9L^2 + 3e(X)).$$

1.3 Superfici con secondo spazio osculatore degenere

Consideriamo una superficie $S \subset \mathbf{P}^N = \mathbf{P}(V)$ non iperpiana e supponiamo $N \geq 5$. Ricordiamo che se una superficie è k-regolare, si ha

$$\dim \mathrm{Osc}^k_x(S) = \binom{k+2}{2} - 1$$

per ogni punto $x \in S$. Esistono naturalmente superfici genericamente k-regolari, cioè tali che l'uguaglianza precedente vale per ogni punto di un aperto denso $\mathcal{U}$, ma esistono anche superfici dove tale uguaglianza non vale in nessun punto. Esaminiamo, ad esempio, il caso delle superfici per cui è soddisfatta la seguente condizione

$$\dim \mathrm{Osc}^2_x(S) \leq 4 \text{ per ogni } x \in S \qquad (L)$$

che equivale, naturalmente, alla condizione

$$\mathrm{rk} j_{2,x} \leq 5 \text{ per ogni } x \in S.$$

Proposizione 1.3.1 *Se S è uno scroll in $\mathbf{P}^N$, soddisfa la condizione (L).*

Dimostrazione: Le coordinate omogenee dei punti di $S \subset \mathbf{P}^N$ si possono scrivere localmente in funzione dei parametri (u, v) come

$$x_i(u, v) = a_i + v b_i \text{ per } i = 0, \ldots, N,$$

dove $a_i = a_i(u)$ e $b_i = b_i(u)$ sono funzioni olomorfe in S e v compare linearmente perché le fibre di S sono rette. Ogni sezione $s \in V$ è una combinazione lineare delle x_i,

$$s = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i x_i$$

Ricordiamo che il 2-getto associato alla sezione s è

$$j_2(s) = (s, s_u, s_v, s_{uu}, s_{uv}, s_{vv})$$

perciò la matrice che rappresenta j_2 nel punto (u, v) è

$$\begin{bmatrix} a_0 + v b_0 & \ldots & \ldots & \ldots & a_N + v b_N \\ (a_0)_u + v(b_0)_u & \ldots & \ldots & \ldots & (a_N)_u + v(b_N)_u \\ b_0 & \ldots & \ldots & \ldots & b_N \\ (a_0)_{uu} + v(b_0)_{uu} & \ldots & \ldots & \ldots & (a_N)_{uu} + v(b_N)_{uu} \\ (b_0)_u & \ldots & \ldots & \ldots & (b_N)_u \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

da cui risulta che $\mathrm{rk} j_2(x_i) \leq 5$ per ogni (u, v). In altri termini si può dire che qualsiasi sezione s su S soddisfa l'equazione differenziale $s_{vv} = 0$. $\square$

E' interessante notare che non tutte le superfici che soddisfano la condizione (L) sono rigate: la superficie di Togliatti costruita come proiezione in $\mathbf{P}^5$ di una superficie di Del Pezzo di grado 6 in $\mathbf{P}^6$ è un esempio. (Perkinson, inoltre, ha scoperto altre due superfici non geometricamente rigate che soddisfano la condizione (L) e che, come la superficie di Togliatti, sono toriche.) Come abbiamo visto nella dimostrazione precedente, la condizione (L) corrisponde a un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine per le funzioni coordinate su S. Differenziando ulteriormente questa equazione, si ottengono equazioni differenziali di ordine superiore, che impongono dei vincoli agli spazi osculatori corrispondenti. Si può dimostrare, più precisamente, la seguente

Proposizione 1.3.2 *La condizione*

$$\dim \mathrm{Osc}_x^2(S) \leq 4 \textit{ per qualche } x \in S$$

implica che

$$\dim \mathrm{Osc}_x^k(S) \leq 2k \textit{ per ogni } k \geq 2.$$

Dimostrazione: La condizione

$$\dim \mathrm{Osc}_x^2(S) \leq 4$$

equivale ad affermare che la matrice $M_{2,x}$, che rappresenta il morfismo $j_{2,x}$, ha rango ≤ 5. Scegliendo un'opportuna base di V, $\langle s_o, \ldots, s_N \rangle$, dove $s_i = s_i(u, v)$, per $i = 0, \ldots, N$, possiamo supporre che l'ultima riga della matrice sia formata da zeri, cioè che ogni sezione $s \in V$ soddisfi l'equazione differenziale $s_{vv} = 0$. Sia, dunque,

$$M_{2,x} = \begin{bmatrix} s_0 & \ldots & \ldots & \ldots & s_N \\ (s_0)_u & \ldots & \ldots & \ldots & (s_N)_u \\ (s_0)_v & \ldots & \ldots & \ldots & (s_N)_v \\ (s_0)_{uu} & \ldots & \ldots & \ldots & (s_N)_{uu} \\ (s_0)_{uv} & \ldots & \ldots & \ldots & (s_N)_{uv} \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Dimostriamo, ora, per induzione che per ogni $k \geq 2$ la matrice $M_{k,x}$, che rappresenta $j_{k,x}$, contiene almeno $\begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix}$ righe nulle. Se $k = 2$, infatti, è evidente che la matrice contiene almeno una riga nulla. Supponendo che la matrice $M_{k-1,x}$ contenga almeno $\begin{pmatrix} k-1 \\ 2 \end{pmatrix}$ righe nulle, si ha

$$M_{k,x} = \begin{bmatrix} M_{k-1,x} \\ R \end{bmatrix},$$

dove

$$R = \begin{bmatrix} (s_0)_{u\ldots u} & \ldots & \ldots & \ldots & (s_N)_{u\ldots u} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (s_0)_{v\ldots v} & \ldots & \ldots & \ldots & (s_N)_{v\ldots v} \end{bmatrix}.$$

La matrice R ha $k+1$ righe, che hanno come elementi le derivate di ordine k, rispetto ai parametri u e v, delle sezioni $s_0, \ldots, s_N$. Poiché $(s_i)_{vv} = 0$, per ogni i, la matrice R avrà almeno $k-1$ righe nulle e dunque il numero delle righe nulle della matrice $M_{k,x}$ è almeno

$$\begin{pmatrix} k-1 \\ 2 \end{pmatrix} + (k-1) = \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Possiamo concludere, allora, che per ogni $k \geq 2$

$$\mathrm{rk} M_{k,x} \leq \begin{pmatrix} k+2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix} = 2k+1,$$

cioè

$$\mathrm{rk} j_{k,x} \leq 2k+1$$

e questo significa che

$$\dim \mathrm{Osc}^k_x(S) \leq 2k, \text{ per ogni } k \geq 2.$$

□

1.4 Un esempio di comportamento patologico: la superficie di Togliatti

Per *superficie di Del Pezzo* di grado d intendiamo una superficie con $-K_S$ ampio. Per $d \geq 3$ sappiamo che $-K_S$ è molto ampio e poniamo $L = -K_S$.

Se $3 \leq d \leq 9$ e $S \neq \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, inoltre, S è il piano proiettivo scoppiato in $9-d$ punti in posizione generale.
Consideriamo ora la superficie di Del Pezzo $(S, L) = (S, -K_S)$ di grado 6. Essa si ottiene scoppiando $\mathbf{P}^2$ in 3 punti non allineati $\{p_1, p_2, p_3\}$. Sia $\sigma : S \to \mathbf{P}^2$ lo scoppiamento. Scegliendo coordinate omogenee su $\mathbf{P}^2$ in modo che

$$p_1 = (1:0:0),\ p_2 = (0:1:0),\ p_3 = (0:0:1),$$

avremo che $\mid L \mid = \mid \sigma^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(3) - e_1 - e_2 - e_3 \mid$, dove $e_i = \sigma^{-1}(p_i)$, per $i = 1, 2, 3$.
Come base di $H^0(L)$, perciò, possiamo considerare quella corrispondente ai 7 monomi

$$x_0^2 x_1, x_0^2 x_2, x_0 x_1^2, x_0 x_2^2, x_1^2 x_2, x_1 x_2^2, x_0 x_1 x_2,$$

che rappresentano le cubiche più semplici passanti per i punti p_1, p_2, p_3. Se usiamo come coordinate affini $u = \frac{x_1}{x_0}$ e $v = \frac{x_2}{x_0}$, la superficie $S \subset \mathbf{P}^6$ è allora la chiusura dell'immagine della mappa razionale $\mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^6$ data da

$$(u, v) \mapsto (u : v : u^2 : v^2 : u^2 v : uv^2 : uv)$$

Si può verificare che il punto $Q = (0:0:0:0:0:0:1)$ non appartiene alla superficie S, nè alla sua varietà delle secanti e dunque la proiezione $\pi_Q : \mathbf{P}^6 \to \mathbf{P}^5$ è un isomorfismo.
Poniamo dunque $Y := \pi_Q(S) \subset \mathbf{P}^5$. Y è detta *superficie di Togliatti* ed è una superficie liscia e isomorfa a S. La proiezione π_Q si può anche interpretare come il morfismo φ_W associato al sottospazio $W \subset H^0(L)$ generato dalle coniche corrispondenti ai primi sei monomi $\{x_0^2 x_1, x_0^2 x_2, x_0 x_1^2, x_0 x_2^2, x_1^2 x_2, x_1 x_2^2\}$ dei sette scelti come base di $H^0(L)$. In coordinate affini, allora, Y è la chiusura dell'immagine della mappa razionale $\mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^5$

$$(u, v) \mapsto (u : v : u^2 : v^2 : u^2 v : uv^2).$$

Per calcolare il rango di $j_{2,x}$, ora, consideriamo la matrice che ha per righe le coordinate dei punti di Y e le relative derivate parziali di ordine primo e secondo:

$$\begin{bmatrix} u & v & u^2 & v^2 & u^2 v & uv^2 \\ 1 & 0 & 2u & 0 & 2uv & v^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2v & u^2 & 2uv \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2u & 2v \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2u \end{bmatrix}$$

Osservando tale matrice, si può verificare facilmente che per ogni sezione $s \in W$ vale la seguente relazione

$$2s - 2u\frac{\partial s}{\partial u} - 2v\frac{\partial s}{\partial v} + u^2\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + uv\frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v} + v^2\frac{\partial^2 s}{\partial v^2} = 0.$$

E' ovvio, allora, che

$$\mathrm{rk} j_{2,x} \leq 5 \text{ per ogni } x \in Y,$$

in altre parole il secondo spazio osculatore in ogni punto ha dimensione minore o uguale a 4, cioè la superficie di Togliatti soddisfa la condizione (L) introdotta nella sezione precedente.
Il comportamento osculatorio di Y, inoltre, è particolarmente degenere, perchè esistono dei punti dove la dimensione di Osc_x^2 è addirittura 2. Denotiamo, infatti, con E l'insieme delle tre curve eccezionali e_1, e_2, e_3 in S e delle trasformate proprie delle rette $l_{i,j} := \langle p_i, p_j \rangle$, dove $1 \leq i < j \leq 3$, congiungenti coppie di punti appartenenti all'insieme $\{p_1, p_2, p_3\}$ in $\mathbf{P}^2$. Denotiamo con $\mathcal{V}$ l'insieme dei vertici di E, cioè l'insieme dei punti di intersezione delle coppie di curve in E. Si verifica che $\mathcal{V}$ contiene esattamente 6 punti. Mostriamo ora che il secondo spazio osculatore a Y in ogni punto di $\pi_Q(\mathcal{V})$ ha dimensione 2. Se, per esempio, $x \in e_1$, utilizzando la coordinata locale t sulla curva eccezionale, abbiamo le coordinate locali (u,t) con $v = ut$, quindi, dividendo per u i termini che rappresentano le coordinate omogenee dei punti della superficie S, abbiamo

$$(u,t) \mapsto (1 : t : u : ut^2 : u^2t : u^2t^2 : ut).$$

Per esprimere i punti sulla superficie Y è sufficiente ricordare che la proiezione π_Q ha come effetto quello di tralasciare l'ultima coordinata

$$(u,t) \mapsto (1 : t : u : ut^2 : u^2t : u^2t^2),$$

e quindi, per la superficie di Togliatti, la matrice corrispondente a $j_{2,x}$ è

$$\begin{bmatrix} 1 & t & u & ut^2 & u^2t & u^2t^2 \\ 0 & 0 & 1 & t^2 & 2ut & 2ut^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2ut & u^2 & 2u^2t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2t & 2t^2 \\ 0 & 0 & 0 & 2t & 2u & 4ut \\ 0 & 0 & 0 & 2u & 0 & 2u^2 \end{bmatrix}$$

e, poiché nei punti di $\pi_Q(e_1)$ si ha $u = 0$, la matrice si riduce alla forma

$$\begin{bmatrix} 1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2t & 2t^2 \\ 0 & 0 & 0 & 2t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

da cui si vede chiaramente che il rango è 5 se $t \neq 0$, cioè nel generico punto su $\pi_Q(e_1)$, mentre è 3 se $t = 0$, cioè nel vertice $e_1 \cap l_{1,2}$.
Dunque

$$\mathrm{rk} j_{2,x} = \begin{cases} 5 & \text{per } x \in Y \setminus \pi_Q(\mathcal{V}) \\ 3 & \text{per } x \in \pi_Q(\mathcal{V}) \end{cases}$$

1.5 Il comportamento osculatorio di secondo ordine degli scroll

Abbiamo visto nella sezione 1.3 che se S è uno scroll il suo secondo spazio osculatore in ogni punto ha dimensione inferiore alla massima attesa. Il suo comportamento, però, non sarà eccessivamente patologico, come nel caso della superficie di Togliatti, perché si può vedere che lo spazio osculatore di ordine 2 ha dimensione almeno 3 in ogni punto. In questa sezione, infatti, dimostreremo il seguente risultato, ispirato da [L]

Teorema 1.5.1 *Dato uno scroll $S \subset \mathbf{P}(V)$, per ogni punto $x \in S$ risulta*

$$\dim \mathrm{Osc}^2_x(S) \geq 3.$$

Questo equivale ad affermare che esistono iperpiani tangenti a S in x che non sono contemporaneamente 2-osculatori, ovvero che, per ogni $x \in S$,

$$| V - 3x | \subset | V - 2x |,$$

ma

$$| V - 3x | \neq | V - 2x | .$$

Poniamo, ora,

$$| V - f_x | := \mathbf{P}(\{s \in V \mid (s)_0 \supseteq f_x\}),$$

$$| V - f_x - x | := \mathbf{P}(\{s \in V \mid (s)_0 \supseteq f_x, (s)_0 - f_x \ni x\}),$$

e, naturalmente,

$$| V - 2f_x | := \mathbf{P}(\{s \in V \mid (s)_0 \supseteq f_x, (s)_0 - f_x \supseteq f_x\}),$$

$$| V - 2f_x - x | := \mathbf{P}(\{s \in V \mid (s)_0 \supseteq f_x, (s)_0 - f_x \supseteq f_x, (s)_0 - 2f_x \ni x\}).$$

Abbiamo dimostrato nel lemma 0.3.4, che se un divisore D ha un punto doppio in x, cioè $D \in | V - 2x |$, allora $D = f_x + R$, con $R \in | V - f_x - x |$ e, analogamente, se D ha un punto triplo cioè $D \in | V - 3x |$, allora $D = 2f_x + T$, con $T \in | V - 2_x - x |$. Abbiamo allora che

$$\dim | V - 2x | = \dim | V - f_x - x |,$$

$$\dim | V - 3x | = \dim | V - 2f_x - x | .$$

Per dimostrare il teorema 1.5.1 basterà, allora, dimostrare che

$$\dim | V - f_x - x | > \dim | V - 2f_x - x | .$$

Introduciamo ora alcuni lemmi utili a tale dimostrazione.

Lemma 1.5.2 *Per ogni fibra f_x di S il sistema lineare $| V - f_x |$ è privo di punti base.*

Dimostrazione: Se, per assurdo, $y \in S$ fosse un punto base per il sistema lineare $| V - f_x |$, allora avremmo

$$| V - f_x - y | = | V - f_x | = | V - x - x' |, \text{ per ogni } x' \in f_x, \ x' \neq x$$

e

$$| V - f_x - y | \subseteq | V - x'' - y |, \text{ per ogni } x'' \in f_x.$$

Poiché $| V |$ è molto ampio, $| V - x - x' |$ e $| V - x'' - y |$ hanno entrambi codimensione 2 in $| V |$ e dunque hanno la stessa dimensione. Si ha allora che $| V - f_x - y | = | V - x'' - y |$ per ogni $x'' \in f_x$. Questo significa, allora, che ogni divisore $D \in | V |$ che contiene il punto y e un punto della fibra f_x è riducibile, perché contiene anche l'intera fibra f_x. Si ha così, quindi, che ogni divisore $D \in | V - y |$ è riducibile, ma ciò è impossibile. Un divisore in $| V - y | \subset | V |$ è, infatti, connesso, poichè il sistema lineare $| V |$ è ampio. Se, allora, ogni $D \in | V - y |$ fosse riducibile in due componenti A e B, si avrebbe $A \cap B \neq \emptyset$. Questo implica che ogni divisore D avrebbe delle singolarità, ma ciò è assurdo perché, per il teorema 1.7.8 di [BS], esiste un aperto denso $\mathcal{U} \subseteq \mid V - y \mid$ tale che, se $D \in \mathcal{U}$, allora D è liscio. $\square$

Il lemma 1.5.2 ci assicura che la mappa $\varphi := \varphi_{|V-f_x|}$ associata a $\mid V - f_x \mid$ è un morfismo. Osserviamo che il morfismo φ non è banale, cioè $\dim\varphi(S) \geq 1$. Se, infatti, $\dim\varphi(S) = 0$, allora avremmo $\dim\mid V - f_x \mid= 0$, cioè il sistema lineare conterrebbe un solo divisore $\mid V - f_x \mid= \{D\}$ e quindi $\mid V \mid= \{f_x + D\}$, cioè $\dim\mid V \mid= 1$, che è assurdo.

Lemma 1.5.3 *φ ha immagine 2-dimensionale (eccetto il caso $(S, L, V) = (\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1, \mathcal{O}(1,1), H^0(L))$) e ogni fibra di φ è un insieme finito o un insieme finito più la sezione fondamentale nel caso in cui $S = \mathbb{F}_e$, con $e > 0$.*

Dimostrazione: Se per assurdo $\dim\varphi(S) \leq 1$, allora il morfismo φ dovrebbe contrarre delle curve. Analizziamo allora tutte le curve contraibili. Osserviamo innanzitutto che, per il lemma 1.5.2, $\mid V - f_x \mid$ non ha componenti fisse e, a maggior ragione, neppure $\mid L - f_x \mid$ ne ha. Per ogni curva irriducibile C in S, dunque, esiste un divisore D in $\mid L - f_x \mid$ che non contiene C tra le sue componenti e quindi $CD \geq 0$. Ciò significa che $L - f_x$ è nef.

Ora sia $L \equiv C_0 + mf$; poiché L è molto ampio, in particolare è ampio e per la proposizione 0.2.2 abbiamo

$$m > \begin{cases} e & \text{se } e \geq 0, \\ \frac{e}{2} & \text{se } e < 0, \end{cases}$$

inoltre per la proposizione 0.2.3, poiché $L - f_x \equiv C_0 - (m-1)f$ è nef,

$$m - 1 \geq \begin{cases} e & \text{se } e \geq 0, \\ \frac{e}{2} & \text{se } e < 0. \end{cases}$$

Se C è una curva irriducibile su S contratta da φ, poiché $\dim\varphi(S) \geq 1$ abbiamo

$$C^2 \leq 0$$

e, inoltre, se $D \in\mid L - f_x \mid$ si deve avere $DC \leq 0$, ma, d'altra parte, $DC \geq 0$ perché D è nef, quindi

$$DC = 0.$$

Per la proposizione 0.2.1 la curva C può essere solo una fibra, la sezione fondamentale oppure essere numericamente equivalente a

$$aC_0 + bf, \text{ con } \begin{cases} a > 0, b \geq ae & \text{se } e \geq 0, \\ a = 1, b \geq 0 \text{ o } a \geq 2, b \geq \frac{ae}{2} & \text{se } e < 0. \end{cases}$$

Analizziamo i diversi casi:

(1) Se $C = f$ allora

$$0 = C(L - f_x) = f(C_0 + (m-1)f) = 1,$$

che è assurdo.

(2) Se $C = C_0$ allora

$$0 = (L - f_x)C_0 = -e + m - 1,$$

cioè $m - 1 = e$ e se fosse $e < 0$ allora avremmo $m - 1 = e < e/2$, ma ciò è contrario alla condizione imposta all'inizio $m - 1 \geq e/2$, quindi $e \geq 0$ e $m = e + 1$. Ora notiamo che il fibrato lineare L ristretto alla curva C_0 ha grado

$$LC_0 = (C_0 + (e+1)f)C_0 = -e + e + 1 = 1$$

cioè C_0 è una curva razionale, quindi $q = 0$ e $S = \mathbb{F}_e$ con $e \geq 0$. Se ora $e = 0$, $S = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ è la quadrica e $\varphi = \varphi_{|C_0|}$ è la seconda proiezione su $\mathbf{P}^1$ ed ha naturalmente immagine 1-dimensionale: questa, infatti, è l'eccezione prevista dall'enunciato del lemma. Se, invece, $e > 0$, allora l'unica curva che può essere contratta da φ è C_0.

(3) Se $C \neq f, C_0$ allora resta solo la possibilità

$$C = aC_0 + bf, \text{ con } \begin{cases} a > 0, b \geq ae & \text{se } e \geq 0, \\ a = 1, b \geq 0 \text{ o } a \geq 2, b \geq \frac{ae}{2} & \text{se } e < 0. \end{cases}$$

e quindi

$$0 = C(L - f_x) = (aC_0 + bf)(C_0 + (m-1)f) = -ae + b + a(m-1).$$

Se $e \geq 0$, poiché $b - ae \geq 0$ e $a(m-1) \geq 0$ si ha

$$b = ae; m = 1 \text{ quindi } e \leq 0; \; e = 0; \; b = 0,$$

ovvero $C = aC_0$, con $a = 1$ perché C è irriducibile, cioè $C = C_0$ che è proprio il caso che avevamo escluso inizialmente.

Se infine $e < 0$, abbiamo due possibilità:

(i) se $a = 1$ e $b \geq 0$, si deve avere

$$0 = -\frac{e}{2} + b + (m - 1 - \frac{e}{2})$$

e, poiché si ha $m-1 \geq \frac{e}{2}$ e $b \geq 0$, dovrebbe essere $e \geq 0$, il che è assurdo perché $e < 0$;

(ii) se $a \geq 2$ e $b \geq \frac{ae}{2}$, allora si ha

$$0 = (-\frac{ae}{2} + b) + a(m - 1 - \frac{e}{2})$$

e dunque $b = ae/2$ e $m = 1 + e/2$. Si avrebbe quindi

$$C \equiv a(C_0 - \frac{e}{2} f_x),$$

ma poiché C è irriducibile deve essere $a = 1$, ma ciò è assurdo perché $a \geq 2$.

□

Possiamo dimostrare, ora, la seguente proposizione, che costituisce una generalizzazione di un lemma di Ionescu–Toma relativo ai sistemi lineari completi [IT, Lemma 1].

Proposizione 1.5.4 *Siano (S, V) uno scroll e f_x, f_y le fibre che passano per due punti $x, y \in S$ e denotiamo, come sopra,*

$$\mid V - f_x - f_y \mid := \mathbf{P}(\{s \in V \mid (s)_0 \supseteq f_x \cup f_y\}),$$

allora

$$\dim \mid V - f_x - f_y \mid = \dim \mid V \mid -4.$$

Dimostrazione: Ricordiamo che, per la definizione di scroll, $\mid V \mid$ è molto ampio e non è necessariamente completo. Poiché le fibre, nell'immersione data da $\mid V \mid$, sono rette, si ha

$$\mid V - f_x - f_y \mid = \mid V - f_x - y - y' \mid \ \text{ per } y' \in f_y, \ y' \neq y.$$

Il luogo dei punti base è

$$\mathrm{Bs} \mid V - f_x - y \mid = \bigcap \{D : D \in \mid V - f_x \mid, y \in D\} = \varphi^{-1}(\varphi(y))$$

e, quindi, per il lemma 1.5.3 è un insieme che taglia f_y in un insieme finito di punti, eventualmente anche vuoto. Possiamo scegliere, perciò un punto $y' \in f_y$ tale che non appartenga al luogo dei punti base di $\mid V - f_x - y \mid$ e perciò

$$\dim \mid V - f_x - f_y \mid = \dim \mid V - f_x - y \mid -1$$

e

$$\dim \mid V - f_x - y \mid = \dim \mid V - f_x \mid -1,$$

poiché $\mid V - f_x \mid$ è spanned per il lemma 1.5.2. Le ultime due relazioni implicano che

$$\dim \mid V - f_x - f_y \mid = \dim \mid V - f_x \mid -2$$

e, dato che $\mid V \mid$ è molto ampio, possiamo concludere che

$$\dim \mid V - f_x - f_y \mid = \dim \mid V \mid -4.$$

□

Dimostrazione del teorema 1.5.1: Come si è osservato sopra, per dimostrare il teorema è sufficiente dimostrare che

$$\dim \mid V - f_x - x \mid > \dim \mid V - 2f_x - x \mid .$$

Ripetendo, ora, il ragionamento utilizzato nella dimostrazione della proposizione precedente e utilizzando le stesse notazioni, si ha

$$\mid V - 2f_x \mid = \mid V - f_x - x - x' \mid \quad \text{per } x' \in f_x,\ x' \neq x.$$

Considerando il luogo dei punti base si trova

$$\mathrm{Bs} \mid V - f_x - x \mid = \bigcap \{D : D \in \mid V - f_x \mid, x \in D\} = \varphi^{-1}(\varphi(x))$$

e, quindi, per il lemma 1.5.3 esso è un insieme che taglia f_x in un insieme finito di punti. Possiamo scegliere, perciò, un punto $x' \in f_x$ tale che non appartenga al luogo dei punti base di $\mid V - f_x - x \mid$ e perciò

$$\dim \mid V - 2f_x \mid = \dim \mid V - f_x - x \mid -1.$$

Ora, naturalmente, si ha

$$\mid V - 2f_x \mid \supseteq \mid V - 2f_x - x \mid,$$

e dunque si ottiene

$$\dim \mid V - 2f_x \mid \geq \dim \mid V - 2f_x - x \mid .$$

Si può concludere, allora, che

$$\dim \mid V - f_x - x \mid > \dim \mid V - 2f_x \mid \geq \dim \mid V - 2f_x - x \mid .$$

□

1.6 La congettura di Piene–Tai

Piene e Tai hanno studiato le superfici che soddisfano la condizione (L)

$$\dim \mathrm{Osc}_x^2(S) \leq 4 \text{ per ogni } x \in S,$$

descritta nella sezione 1.3, e che non mostrano ulteriori comportamenti di iperosculazione.

Definizione 1.6.1 *Diremo che una superficie $S \subset \mathbf{P}^N$* soddisfa la condizione $(L^\#)$ *se S è liscia, non iperpiana, soddisfa la condizione (L) e, inoltre,*

$$\dim \mathrm{Osc}_x^n(S) = 2n \text{ per ogni } x \in S,$$

dove $n = \left[\frac{N-1}{2}\right]$.

Proposizione 1.6.2 *La condizione $(L^\#)$ implica che*

$$\dim \mathrm{Osc}_x^k(S) = 2k \text{ per ogni } x \in S, \text{ per ogni } 2 \leq k \leq n.$$

Dimostrazione: Se per assurdo esistessero x e $2 \leq k_0 < n$ tali che

$$\dim \mathrm{Osc}_x^{k_0}(S) < 2k_0,$$

allora, per la proposizione 1.3.2, avremmo che

$$\dim \mathrm{Osc}_x^k(S) < 2k \text{ per ogni } k \geq k_0,$$

e quindi anche per $k = n$, che è contro l'ipotesi iniziale. □

Enunciamo ora la congettura di Piene-Tai [PT]

Congettura 1.6.3 *Sia $S \subset \mathbf{P}^N$ una superficie che soddisfa la condizione $(L^\#)$, allora*

(i) *se $N = 2n + 1$ è dispari, S è uno scroll razionale normale bilanciato di grado $2n$;*

(ii) *se $N = 2n + 2$ è pari, S è uno scroll razionale normale semibilanciato di grado $2n + 1$.*

Ballico, Piene e Tai hanno dimostrato la parte (i) della congettura in [PT] e [BPT] e daremo nel prossimo capitolo una riesposizione di questa dimostrazione che tiene conto degli sviluppi della teoria dell'aggiunzione successivi a quelli utilizzati in [BPT], mentre nel terzo capitolo offriremo dei

controesempi che falsificano la parte (ii) della congettura.
Osserviamo innanzitutto che, tra gli scroll razionali normali, gli unici che soddisfano la condizione $(L^{\#})$ sono quello bilanciato e quello semibilanciato, infatti:

Proposizione 1.6.4 *Sia $S \subset \mathbf{P}^N$ uno scroll razionale normale che soddisfa la condizione $(L^{\#})$, allora S è bilanciato se N è dispari, è semibilanciato se N è pari.*

Dimostrazione: Supponiamo che S sia uno scroll normale razionale in $\mathbf{P}^N$ che soddisfa la condizione $(L^{\#})$. Abbiamo visto nella sezione 1.1 come si descrivono i modelli proiettivi dello scroll razionale normale di invariante e. Siano dunque C_1 e C_2 due curve razionali normali di grado rispettivamente d_1 e d_2 (con $d_1 \geq d_2 \geq 1$ e $d_1 - d_2 = e$), contenute in $\mathbf{P}^{d_1}$ e $\mathbf{P}^{d_2}$ sghembi in $\mathbf{P}^{d_1+d_2+1}$. Lo scroll S, allora, è costituito dall'unione delle rette congiungenti punti corrispondenti in un isomorfismo tra le due curve. Le coordinate affini dei punti di S si possono scrivere localmente in funzione dei parametri (u, v) come

$$x(u, v) = (vu^{d_1} : vu^{d_1-1} : \ldots : vu : v : u^{d_2} : \ldots : u : 1) \in \mathbf{P}^{d_1+d_2+1}.$$

Il rango $\mathrm{rk} j_{k,x}$ è quello della matrice $M_{k,x}$ che ha per righe le coordinate dei punti di S e tutte le loro derivate parziali fino all'ordine k. Per esempio

$$M_{2,x} = [A \mid B]$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} vu^{d_1} & vu^{d_1-1} & \cdots & vu^2 & vu & v \\ d_1vu^{d_1-1} & (d_1-1)vu^{d_1-2} & \cdots & 2vu & v & 0 \\ u^{d_1} & u^{d_1-1} & \cdots & u^2 & u & 1 \\ d_1(d_1-1)vu^{d_1-2} & (d_1-1)(d_1-2)vu^{d_1-3} & \cdots & 2v & 0 & 0 \\ d_1u^{d_1-1} & (d_1-1)u^{d_1-2} & \cdots & 2u & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} u^{d_2} & \cdots & u^2 & u & 1 \\ d_2u^{d_2-1} & \cdots & 2u & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ d_2(d_2-1)u^{d_2-2} & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

E' evidente, allora, che la matrice $M_{2,x}$ ha sempre rango minore o uguale a 5, come succede per tutti gli scroll.
Se $N = 5$ o 6, la condizione $(L^{\#})$ equivale a richiedere che

$$\mathrm{rk}M_{2,x} = 5 \text{ per ogni } x \in S.$$

Osserviamo, allora, che d_2 non può essere < 2, perché altrimenti la matrice $M_{2,x}$ avrebbe rango < 5 nei punti x per i quali $v = 0$. Se $d_2 \geq 2$, invece, si verifica che il rango della matrice $M_{2,x}$ è uguale a 5 per ogni $x \in S$. Poiché $N = d_1 + d_2 + 1$ e $d_1 \geq d_2 \geq 2$, si possono avere solo i seguenti casi:
$N = 5;\ d_1 = d_2 = 2;\ e = 0$; oppure
$N = 6;\ d_1 = 3, d_2 = 2;\ e = 1$;
nel primo caso S è uno scroll normale razionale bilanciato in $\mathbf{P}^5$, nel secondo caso è uno scroll normale razionale semibilanciato in $\mathbf{P}^6$.
Se $N = 7$ o 8, la condizione $(L^{\#})$ equivale alla condizione

$$\mathrm{rk}M_{3,x} = 7 \text{ per ogni } x \in S.$$

Osserviamo che se $d_2 < 3$, allora il rango della matrice $M_{3,x}$ è < 7 nei punti in cui $v = 0$. Si deve avere, dunque, $d_2 \geq 3$ e in tal caso la condizione $(L^{\#})$ è sempre soddisfatta. Le uniche possibilità che si presentano sono
$N = 7;\ d_1 = d_2 = 3;\ e = 0$; oppure
$N = 8;\ d_1 = 4, d_2 = 3;\ e = 1$;
nel primo caso, quindi S è uno scroll normale razionale bilanciato in $\mathbf{P}^7$, nel secondo caso è uno scroll normale razionale semibilanciato in $\mathbf{P}^8$.
In generale si ottiene che se $N = 2k + 1$ o $2k + 2$ con $k \geq 2$, la condizione $(L^{\#})$ corrisponde alla condizione

$$\mathrm{rk}M_{k,x} = 2k + 1 \text{ per ogni } x \in S,$$

ed essa è verificata se e solo se $d_2 \geq k$, ma, poiché $N = d_1 + d_2 + 1$, si possono presentare solo i due casi seguenti:
$N = 2k + 1;\ d_1 = d_2 = k;\ e = 0$; oppure
$N = 2k + 2;\ d_1 = k + 1, d_2 = k;\ e = 1$.
Lo scroll S, dunque, può essere solo uno scroll razionale normale bilanciato in $\mathbf{P}^{2k+1}$ oppure uno scroll razionale normale semibilanciato in $\mathbf{P}^{2k+2}$. $\square$

Capitolo 2

Dimostrazione della congettura di Piene–Tai in dimensione dispari

2.1 Superfici in spazi proiettivi di dimensione dispari

Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione $2n + 2$ e sia S una superficie liscia non iperpiana in $\mathbf{P}(V) = \mathbf{P}^{2n+1}$. Ricordiamo che J_kL è il k-esimo fibrato in getti del fibrato iperpiano $L = \mathcal{O}_S(1)$ ed è un fibrato vettoriale di rango $\begin{pmatrix} k+2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Abbiamo inoltre l'omomorfismo di fasci

$$j_k : V \otimes \mathcal{O}_S \to J_kL$$

per ogni intero positivo k. Indicheremo con

$$K_k := \mathrm{Ker} j_k \ ; \ P_k := \mathrm{Im} j_k \ ; \ Q_k := \mathrm{Coker} j_k.$$

Poiché S è una superficie liscia, K_k è sempre un fibrato vettoriale, mentre i fasci P_k e Q_k potrebbero in generale non essere fibrati, perché il rango di j_k potrebbe variare. Se, però, S soddisfa la condizione $(L^{\#})$ abbiamo visto nella proposizione 1.6.2 che

$$\mathrm{rk} j_{k,x} = 2k + 1, \text{ per ogni } x \in S \text{ e per ogni } k \leq n$$

e quindi, in tal caso, P_k è un fibrato vettoriale di rango $2k+1$. Per la stessa ragione Q_k è un fibrato vettoriale di rango

$$\binom{k+2}{2} - (2k+1) = \binom{k}{2}.$$

Assumiamo d'ora in poi che S soddisfi la condizione $(L^{\#})$; in particolare

$$\dim \mathrm{Osc}^n_x(S) = 2n \text{ per ogni } x \in S,$$

dove $n = \left[\frac{(2n+1)-1}{2}\right]$. Ora, per il teorema di nullità più rango

$$\mathrm{rk} K_n = \dim V - \mathrm{rk} P_n = (2n+2) - (2n+1) = 1$$

e quindi K_n è un fibrato lineare. Ciò significa che la proiezione

$$\mathbf{P}(K_n^\vee) = \{(x, H) \mid H \supseteq \mathrm{Osc}^n_x\} \subset S \times \mid V \mid \to S$$

è un isomorfismo perché esiste un unico iperpiano H che contiene l'n-esimo spazio osculatore in ciascun punto di S. Identificando S con $\mathbf{P}(K_n^\vee)$, possiamo definire un morfismo

$$\pi : S \to (\mathbf{P}^{2n+1})^\vee = \mid V \mid$$

che associa a ciascun punto di S l'iperpiano H coincidente con $Osc^n_x(S)$. Chiameremo π *morfismo duale stretto* perché la sua immagine $\pi(S) = S^*$ è la varietà duale stretta.

2.2 Proprietà della varietà duale stretta

Studieremo ora alcune proprietà di S^*. Innanzitutto, ovviamente, S^* è irriducibile.

Proposizione 2.2.1 *Il morfismo duale stretto $\pi : S \to S^*$ è finito e, quindi, S^* è una superficie.*

Dimostrazione: Osserviamo innanzitutto che S^* non può essere un punto perché S non è contenuta in nessun iperpiano. Dato un punto y su S^*, allora, la sua controimmagine $\pi^{-1}(y)$ può avere dimensione 0 oppure 1. Dimostriamo che è impossibile che abbia dimensione 1. Sia, infatti, C una curva di S tale che $\pi(C) = y$ e consideriamo l'iperpiano H_y corrispondente al punto $y \in S^*$ e il divisore $L = H_y \cap S$ sulla superficie. Poiché H_y è un iperpiano n-osculatore, per la proposizione 1.2.2, esso taglia la superficie nei punti di osculazione con molteplicità $\geq n+1$, cioè il divisore $L-(n+1)C$ è effettivo. Poiché S non ha punti di iperosculazione, C è liscia e il divisore L non ha componenti diverse da C. Se infatti avesse altre componenti $D \neq C$, allora $D \cap C \neq \emptyset$, poiché L è connesso, e i punti di $D \cap C$ sarebbero punti singolari, cioè in essi H_y sarebbe di osculazione con molteplicità $> n+1$, che è assurdo. Abbiamo, allora,

$$L = (n+1)C,$$

cioè

$$(n+1)^2 C^2 = L^2 = \deg S > 0,$$

ma questo è assurdo perché la curva C ha autointersezione ≤ 0, essendo contratta dalla mappa π. Possiamo concludere, dunque, che $\pi^{-1}(y)$ ha dimensione 0, cioè è un insieme finito di punti. La mappa π è finita e S^* è una superficie. $\square$

Possiamo definire, dunque, $J_m L^*$, cioè l'm-esimo jet-bundle del fibrato iperpiano di S^*, $L^* = \mathcal{O}_{S^*}(1) = (\mathcal{O}_{\mathbf{P}(V^\vee)}(1))_{S^*}$. Abbiamo gli omomorfismi

$$j_m^* : V^\vee \otimes \mathcal{O}_{S^*} \to J_m L^*.$$

Possiamo ora dimostrare la seguente

Proposizione 2.2.2 *S^* è una superficie liscia.*

Dimostrazione: Si può osservare, come in [P], che la composizione delle mappe $(j_{n-1})^\vee$ e $\pi^*(j_1^*)$

$$\pi^*(j_1^*) \circ (j_{n-1})^\vee : (J_{n-1}L)^\vee \to V^\vee \otimes \mathcal{O}_S \to \pi^*(J_1 L^*)$$

è la mappa nulla e dunque

$$\mathrm{Im}(j_{n-1})^\vee \subset \mathrm{Ker}\pi^*(j_1^*).$$

Dualizzando la successione

$$0 \to K_{n-1} \hookrightarrow V \otimes S \to J_{n-1}L \to 0,$$

otteniamo

$$0 \to (J_{n-1}L)^\vee \hookrightarrow V^\vee \otimes S \to K_{n-1}^\vee \to 0$$

e, quindi,

$$K_{n-1}^{\vee} \cong \frac{V^{\vee} \otimes S}{\mathrm{Im}(j_{n-1})^{\vee}}.$$

Sia ora ϕ il morfismo

$$\phi : K_{n-1}^{\vee} \to \pi^*(J_1 L^*)$$

definito da

$$\phi(s + \mathrm{Im}(j_{n-1})^{\vee}) := \pi^*(j_1^*)(s) \text{ per ogni } s \in V^{\vee} \otimes \mathcal{O}_S.$$

Osserviamo che

(i) ϕ è ben definito perché $\mathrm{Im}(j_{n-1})^{\vee} \subset \mathrm{Ker}\pi^*(j_1^*)$,

(ii) ϕ è suriettivo perché $\pi^*(j_1^*)$ lo è,

(iii) poiché $K_{n-1}^{\vee}$ è un fibrato vettoriale di rango $(2n+2)-(2n-1)=3$ e il fascio $J_1 L^*$ ha rango 3 nel punto generico, ϕ deve essere un isomorfismo:

$$K_{n-1}^{\vee} \cong \pi^*(J_1 L^*)$$

e quindi $\pi^*(J_1 L^*)$ è un fibrato vettoriale di rango 3. Ora se consideriamo la successione

$$0 \to \Omega^1_{S^*} \otimes L^* \to J_1 L^* \to J_0 L^* = L^* \to 0$$

e ne facciamo il pull-back tramite π, otteniamo

$$0 \to \pi^*(\Omega^1_{S^*} \otimes L^*) \to \pi^*(J_1 L^*) \to \pi^*(L^*) \to 0.$$

Calcolando il rango degli elementi di tale successione si trova che

$$\mathrm{rk}\pi^*(\Omega^1_{S^*} \otimes L^*) = \mathrm{rk}\pi^*(J_1 L^*) - \mathrm{rk}\pi^*(L^*) = 3 - 1 = 2,$$

ma questo significa che $\Omega^1_{S^*}$ è un fibrato vettoriale di rango 2 e allora S^* è una superficie liscia. □

Proposizione 2.2.3 *Il morfismo duale stretto non ramifica in nessun punto.*

Dimostrazione: Sia $y \in S^*$ un punto della varietà duale stretta, H_y l'iperpiano associato e consideriamo la famiglia di curve piane in S:

$$\mathcal{H} = \{H_y \cap S \mid y \in S^*\}.$$

Ogni punto $x \in \pi^{-1}(y)$ ha molteplicità uguale a $n+1$ sulla curva $H_y \cap S$ perché H_y è un iperpiano n-osculatore a S in y, mentre ogni altro punto ha molteplicità minore di $n+1$ sulla curva. Sia d il grado del morfismo π: per il generico punto y in S^*, $\pi^{-1}(y)$ è costituito da d punti distinti. Poiché nessun punto può avere molteplicità maggiore di $n+1$, per ogni $y \in S^*$ $\pi^{-1}(y)$ consiste di d punti di molteplicità $n+1$, quindi non c'è nessun punto di ramificazione. $\square$

La proposizione precedente implica che

$$\pi^*\Omega^1_{S^*} \cong \Omega^1_S.$$

2.3 Relazioni tra gli invarianti numerici

Introduciamo ora alcune successioni esatte che ci permetteranno di calcolare relazioni numeriche valide per ogni superficie che soddisfa la condizione $(L^\#)$.

Lemma 2.3.1 *Per ogni $m \geq 2$ abbiamo la successione esatta*

$$0 \to S^{m-2}\Omega^1_S \otimes Q \to Q_m \xrightarrow{\beta} Q_{m-1} \to 0$$

Dimostrazione: Abbiamo il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
V_S & \to & J_mL & \to & Q_m & \to & 0 \\
|| & & \downarrow_p & & \downarrow_\beta & & \\
V_S & \to & J_{m-1}L & \to & Q_{m-1} & \to & 0
\end{array}$$

da cui si vede che la proiezione naturale $p : J_mL \to J_{m-1}L$ induce il morfismo suriettivo $\beta : Q_m \to Q_{m-1}$. Definiamo allora $A_m := \mathrm{Ker}(P_m \to P_{m-1})$ e $B_m := \mathrm{Ker}\beta$ e osserviamo che A_m è un fibrato vettoriale di rango $(2m+1) - (2m-1) = 2$, mentre B_m ha rango $\begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m-1 \\ 2 \end{pmatrix} = m-1$. Abbiamo, dunque, il seguente diagramma di successioni esatte di fibrati vettoriali:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & A_m & \to & P_m & \to & P_{m-1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & S^m\Omega^1_S \otimes L & \to & J_mL & \to & J_{m-1}L & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & B_m & \to & Q_m & \xrightarrow{\beta} & Q_{m-1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Notiamo che, poiché L è molto ampio, j_1 è suriettivo e quindi $Q_1 = \mathrm{Coker} j_1 = 0$; dall'ultima riga del diagramma, quindi, si ricava che $B_2 \cong Q_2$. Osserviamo che tale fibrato è lineare e poniamo $Q := Q_2$. Dualizzando, allora, la mappa suriettiva

$$S^2\Omega^1_S \otimes L \to Q,$$

possiamo considerare $Q^\vee$ come un sottofibrato tramite l'inclusione

$$Q^\vee \hookrightarrow S^2 T_S \otimes \mathcal{O}_S(-1),$$

dove $T_S = (\Omega^1_S)^\vee$ è il fibrato tangente di S. In generale la mappa

$$Q^\vee_m \to S^m T_S \otimes \mathcal{O}_S(-1)$$

ha come immagine $B^\vee_m$. Consideriamo la mappa composta

$$\gamma : S^{m-2}T_S \otimes Q^\vee \to S^{m-2}T_S \otimes S^2 T_S \otimes \mathcal{O}_S(-1) \to S^m T_S \otimes \mathcal{O}_S(-1),$$

e mostriamo che

$$\gamma(S^{m-2}T_S \otimes Q^\vee) = B^\vee_m.$$

In un intorno del punto x, infatti, se supponiamo che (u, v) siano le coordinate locali dei punti della superficie S, la mappa $Q^\vee_m \to S^m T_S \otimes \mathcal{O}_S(-1)$ è determinata da un elemento

$$q = a\frac{\partial^2}{\partial u^2} + b\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + c\frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

e $B^\vee_m \subset S^m T_S \otimes \mathcal{O}_S(-1)$ può essere generato localmente dagli elementi

$$q_i = a\frac{\partial^m}{\partial u^{i+1}\partial v^{m-i-1}} + b\frac{\partial^m}{\partial u^i \partial v^{m-i}} + c\frac{\partial^m}{\partial u^{i-1}\partial v^{m-i+1}} \text{ per } i = 1, \ldots, m-1.$$

E' facile vedere, allora, che

$$\gamma\left(\frac{\partial^{m-2}}{\partial u^{i-1}\partial v^{m-i-1}} \otimes q\right) = q_i \text{ per } i = 1, \ldots, m-1.$$

La mappa $\gamma : S^{m-2}T_S \otimes Q^\vee \to B^\vee_m$, dunque, è suriettiva tra fibrati dello stesso rango $m-1$ e quindi è un isomorfismo, cioè

$$B^\vee_m \cong S^{m-2}T_S \otimes Q^\vee$$

ovvero, passando al duale,

$$B_m \cong S^{m-2}\Omega^1_S \otimes Q$$

ed è, perciò, esatta la successione

$$0 \to S^{m-2}\Omega^1_S \otimes Q \to Q_m \to Q_{m-1} \to 0.$$

$\square$

Proposizione 2.3.2 *I fibrati Q_m e $J_{m-2}Q$ hanno lo stesso polinomio di Chern.*

Dimostrazione: Procediamo per induzione su $m \geq 2$. Se $m = 2$, $J_0 Q = Q = Q_2$ e, ovviamente, il polinomio di Chern è lo stesso. Sia $m > 2$ e supponiamo che $c_t(Q_{m-1}) = c_t(J_{m-3}Q)$. Abbiamo la successione esatta ricavata nella proposizione precedente

$$0 \to S^{m-2}\Omega^1_S \otimes Q \to Q_m \to Q_{m-1} \to 0$$

e la successione esatta naturale

$$0 \to S^{m-2}\Omega^1_S \otimes Q \to J_{m-2}Q \to J_{m-3}Q \to 0.$$

Calcolando i polinomi di Chern degli elementi di queste successioni e usando l'ipotesi induttiva, abbiamo che

$$c_t(Q_m) = c_t(S^{m-2}\Omega^1_S \otimes Q)c_t(Q_{m-1}) = c_t(S^{m-2}\Omega^1_S \otimes Q)c_t(J_{m-3}Q) = c_t(J_{m-2}Q).$$

$\square$

Lemma 2.3.3 *E' esatta la successione*

$$0 \to \pi^*(\Omega^1_{S^*} \otimes L^*)^\vee \to S^n\Omega^1_S \otimes L \to S^{n-2}\Omega^1_S \otimes Q \to 0.$$

Dimostrazione: Dalla dimostrazione del lemma 2.3.1 sappiamo che

$$0 \to A_n \to S^n\Omega^1_S \otimes L \to B_n \to 0$$

e che

$$B_n \cong S^{n-2}\Omega^1_S \otimes Q.$$

Ora $A_n := \mathrm{Ker}(P_n \to P_{n-1}) \cong \mathrm{Coker}(K_n \to K_{n-1}) \cong \mathrm{Ker}(K_{n-1}^\vee \to K_n^\vee)^\vee$. Dalla dimostrazione della proposizione 2.2.2 sappiamo che

$$K_{n-1}^\vee \cong \pi^*(J_1 L^*)$$

e inoltre si ha (si confronti [PT])

$$K_n^\vee \cong \pi^*(L^*),$$

da cui si ottiene

$$A_n \cong \mathrm{Ker}(\pi^*(J_1 L^*) \to \pi^*(L^*))^\vee.$$

Dalla successione

$$0 \to \pi^*(\Omega^1_{S^*} \otimes L^*) \to \pi^*(J_1 L^*) \to \pi^*(L^*) \to 0$$

della proposizione 2.2.2, abbiamo che

$$\pi^*(\Omega^1_{S^*} \otimes L^*) \cong \mathrm{Ker}(\pi^*(J_1 L^*) \to \pi^*(L^*))$$

e, passando al duale, si ottiene

$$A_n \cong \pi^*(\Omega^1_{S^*} \otimes L^*)^\vee.$$

In conclusione otteniamo la successione esatta desiderata

$$0 \to \pi^*(\Omega^1_{S^*} \otimes L^*)^\vee \to S^n\Omega^1_S \otimes L \to S^{n-2}\Omega^1_S \otimes Q \to 0.$$

□

Poniamo $K = c_1(\Omega^1_S) = c_1(\pi^*\Omega^1_{S^*})$, $H = c_1(L)$ e $H^* = c_1(\pi^*(L^*))$. Calcolando i polinomi di Chern dalla successione esatta

$$o \to K_n \to V \otimes \mathcal{O}_S \to P_n \to 0,$$

ricordando che K_n ha rango 1 e che $V \otimes \mathcal{O}_S$ è il fibrato banale, abbiamo

$$1 = c_t(V \otimes \mathcal{O}_S) = c_t(K_n)c_t(P_n) = (1 + c_1(K_n)t)(1 + c_1(P_n)t + c_2(P_n)t^2 + \ldots) =$$

$$= 1 + (c_1(K_n) + c_1(P_n))t + (c_1(P_n)c_1(K_n) + c_2(P_n))t^2 + \ldots$$

quindi uguagliando termine a termine i coefficienti del polinomio si ottengono le relazioni:

$$c_1(K_n) + c_1(P_n) = 0$$

e

$$c_1(P_n)c_1(K_n) + c_2(P_n) = 0,$$

cioè

$$c_1(P_n) = -c_1(K_n) = c_1(K_n^\vee) = c_1(\pi^* L^*) = H^*$$

e

$$c_2(P_n) = -c_1(P_n)c_1(K_n) = -H^*(-H^*) = (H^*)^2.$$

Proposizione 2.3.4 *La prima classe di Chern del fibrato L e quella di $\pi^* L^*$ sono uguali.*

Dimostrazione: Dobbiamo dimostrare che $H = H^*$. Dalla successione esatta

$$0 \to P_n \to J_n L \to Q_n \to 0$$

abbiamo

$$c_1(Q_n) = c_1(J_n L) - c_1(P_n) = \binom{n+2}{3} K + \binom{n+2}{2} H - H^*$$

e dalla proposizione 2.3.2 sappiamo che

$$c_1(Q_n) = c_1(J_{n-2}Q) = \binom{n}{3} K + \binom{n}{2} c_1(Q).$$

Uguagliando le due formule ottenute abbiamo, allora,

$$\binom{n+2}{3} K + \binom{n+2}{2} H - H^* = \binom{n}{3} K + \binom{n}{2} c_1(Q)$$

e quindi

$$\binom{n}{2} c_1(Q) = \binom{n+2}{2} H - H^* + n^2 K. \qquad (2.1)$$

Dalla successione esatta del lemma 2.3.3, ora, si ha

$$c_1(\pi^*(\Omega^1_S \otimes L^*))^\vee = c_1(S^n \Omega^1_S \otimes L) - c_1(S^{n-2}\Omega^1_S \otimes Q),$$

e poiché

$$c_1(S^n \Omega^1_S \otimes L) = \binom{n+1}{2} K + (n+1)L$$

e

$$c_1(\pi^*(\Omega^1_S \otimes L^*)) = K^* + 2H^* = K + 2H^*$$

abbiamo

$$-K-2H^* = \binom{n+1}{2} K + (n+1)H - \binom{n-1}{2} K - (n-1)c_1(Q),$$

cioè

$$(n-1)c_1(Q) = 2nK + (n+1)H + 2H^*.$$

Eliminando $c_1(Q)$ da questa equazione e dall'equazione (2.1) si ha subito il risultato

$$H^* = H.$$

□

Denotiamo con c_2 il grado della seconda classe di Chern $c_2(T_S)$ di T_S, che coincide con $c_2(\Omega^1_S)$.

Proposizione 2.3.5 *Per ogni superficie S che soddisfa la condizione $(L^{\#})$ valgono le seguenti relazioni:*

$$(n-1)^2c_2 + (K+2H)(nK+2H) = 0 \tag{2.2}$$

$$(n^2+2n+3)c_2 + nK^2 + 2(n+3)KH = 0 \tag{2.3}$$

o, equivalentemente,

$$(2n+1)c_2 + 2KH - 2H^2 = 0 \tag{2.4}$$

$$n(2n+1)K^2 + 2n(n+5)KH + 2(n^2+2n+3)H^2 = 0 \tag{2.5}$$

$$nK^2 + 2(n+3)H^2 - n(n+5)c_2 = 0. \tag{2.6}$$

Dimostrazione: Dalla proposizione 2.3.4 sappiamo che $H = H^*$ e ricordiamo che $K = c_1(\Omega^1_S) = c_1(\pi^*\Omega^1_{S^*})$. Denotiamo, inoltre, con $Q = c_1(Q)$.
Dimostrazione della (2.2)**:** Ponendo $H = H^*$ nella (2.1) e svolgendo i calcoli, si ottiene

$$(n-1)Q = (n+3)H + 2nK. \tag{2.7}$$

Calcolando la seconda classe di Chern dei vari termini della successione esatta del lemma 2.3.3,

$$0 \to (\Omega^1_S \otimes L)^\vee \to S^n\Omega^1_S \otimes L \to S^{n-2}\Omega^1_S \otimes Q \to 0,$$

si trova

$$c_2(S^n\Omega^1_S\otimes L)=c_2(\Omega^1_S\otimes L)^\vee+c_2(S^{n-2}\Omega^1_S\otimes Q)+c_1(\Omega^1_S\otimes L)^\vee c_1(S^{n-2}\Omega^1_S\otimes Q),$$

da cui, utilizzando le regole del calcolo per le classi di Chern, esposte nella sezione 0.6, si ha

$$c_2(S^n\Omega^1_S)+nc_1(S^n\Omega^1_S)H+\frac{1}{2}n(n+1)H^2=$$
$$=c_2(\Omega^1_S)+c_1(\Omega^1_S)+H^2+c_2(S^{n-2}\Omega^1_S)+(n-2)c_1(S^{n-1}\Omega^1_S)Q+$$
$$+\frac{1}{2}(n-2)(n-1)Q^2-(K+2H)(c_1(S^{n-2}\Omega^1_S)+(n-1)Q),$$

cioè

$$\frac{1}{24}n(n^2-1)(3n+2)K^2+\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)c_2+n\binom{n+1}{2}KH+$$
$$+\frac{1}{2}n(n+1)H^2=c_2+KH+H^2+\frac{1}{24}(n-2)(n-3)(n-1)(3n-4)K^2+$$
$$+\frac{1}{6}(n-2)(n-1)nc_2+(n-2)\binom{n-1}{2}KQ+1/2(n-2)(n-1)Q^2+$$
$$-(K+2H)\left(\binom{n-1}{2}K+(n-1)Q\right).$$

Semplificando e sostituendo la relazione (2.7) si ottiene

$$(n-1)^2c_2+nK^2+4H^2+2(n+1)HK=0,$$

cioè

$$(n-1)^2c_2+(K+2H)(nK+2H)=0.$$

Dimostrazione della (2.3)**:** Per la proposizione 2.3.2 sappiamo che

$$c_t(J_{n-2}Q)=c_t(Q_n)$$

e inoltre $c_1(P_n)=H$ e $c_2(P_n)=H^2$. Calcolando la seconda classe di Chern dei termini della successione esatta

$$0\to P_n\to J_nL\to Q_n\to 0,$$

si ha

$$c_2(J_nL) = c_2(P_n) + c_2(Q_n) + c_1(Q_n)c_1(P_n).$$

Usando le osservazioni precedenti troviamo

$$\binom{3+n}{4}\left(3H^2 + 2nKH + \frac{n^2-1}{3}K^2 + c_2\right) =$$

$$= H^2 + \binom{1+n}{4}\left(3Q^2 + 2(n-2)KQ + \frac{(n-2)^2-1}{3}K^2 + c_2\right) +$$

$$+ \binom{n}{3}KH + \binom{n}{2}QH,$$

da cui, tenendo conto della (2.7), si ha

$$\binom{3+n}{4}\left(3H^2 + 2nKH + \frac{n^2-1}{3}K^2 + c_2\right) - H^2 - \binom{1+n}{4}$$

$$\left(3\frac{1}{(n-1)^2}((n+3)H + 2nK)^2 + 2(n-2)K((n+3)H + 2nK)\frac{1}{n-1}\right) +$$

$$-\binom{1+n}{4}\left(\frac{n^2-4n-3}{3}K^2 + c_2\right) - \binom{n}{3}KH +$$

$$-\binom{n}{2}H\frac{1}{n-1}((n+3)H + 2nK) = 0.$$

Sviluppando questi calcoli si arriva ad ottenere

$$2n(n-1)(2n+1)c_2 + 12(n+1)H^2 + 2n(2n+1)K^2 + 8n(n+2)HK = 0.$$

Se ora eliminiamo H^2 da questa relazione e dalla (2.2), si ottiene subito

$$(n^2 + 2n + 3)c_2 + nK^2 + 2(n+3)KH = 0.$$

Dimostrazione della (2.4)**:** La relazione si ottiene semplicemente eliminando K^2 dalle (2.2) e (2.3).
Dimostrazione della (2.5)**:** La relazione si ottiene eliminando c_2 dalle (2.2) e (2.3).
Dimostrazione della (2.6)**:** La relazione si ottiene eliminando HK dalle (2.2) e (2.3). □

Se introduciamo altri invarianti relativi alla superficie, possiamo esprimere diversamente le relazioni trovate nella proposizione precedente. Siano, dunque, $q = h^1(\mathcal{O}_S(1))$ l'irregolarità della superficie;
g il genere sezionale della superficie.
Se S è birazionalmente rigata e con s indichiamo il numero di scoppiamenti che compongono il morfismo $\phi : S \to S'$, dove S' è la superficie geometricamente rigata birazionalmente equivalente a S (ovvero il suo modello minimale), valgono le relazioni:

$$K^2 = 8(1-q) - s,$$

$$c_2 = 4(1-q) + s.$$

Naturalmente $s \geq 0$, vale il segno $=$ se e solo se S è geometricamente rigata, e si ha $s = \frac{1}{3}(2c_2 - K^2)$. Dalla formula del genere, inoltre, sappiamo che

$$2g - 2 = H^2 + HK.$$

Poniamo infine

$$l = \frac{H^2}{2n}.$$

Proposizione 2.3.6 *Per ogni superficie geometricamente rigata S che soddisfa la condizione $(L^{\#})$ valgono le formule seguenti:*

$$l - 1 + q = \frac{n+6}{4(n+3)}s \tag{2.8}$$

$$g - q = \frac{5n-3}{4(n+3)}s \tag{2.9}$$

Dimostrazione: Sia S geometricamente rigata e supponiamo che soddisfi la condizione $(L^{\#})$.
Dimostrazione della (2.8)**:** Sostituendo nella (2.6) le espressioni di K^2 e c_2 in funzione di s e q, si ha

$$8n(1-q) - ns + 2(n+3)H^2 - n(n+5)a(1-q) - n(n+5)s = 0,$$

quindi

$$4n(n+3)q - n(6+n)s + 2(n+3)H^2 - 4n(n+3) = 0,$$

cioè la relazione voluta

$$q - 1 + l = \frac{n+6}{4(n+3)}s.$$

Dimostrazione della (2.9)**:** Dalla (2.4)

$$(2n+1)c_2 + 2(HK + H^2) - 4H^2 = 0,$$

sostituendo le formule che esprimono c_2, g e l, abbiamo

$$(2n+1)(4 - 4q + s) + 2(2g - 2) - 4(2nl) = 0.$$

Sviluppando i calcoli e sostituendo l'espressione di l ricavata dalla (2.8), si trova

$$4g - 4q = \frac{5n-3}{n+3}s,$$

cioè la (2.9). □

2.4 La dimostrazione del teorema di Ballico–Piene–Tai

Utilizzando ora i risultati ottenuti nelle sezioni precedenti possiamo procedere alla dimostrazione della prima parte della congettura di Piene–Tai, ovvero del seguente

Teorema 2.4.1 (Ballico–Piene–Tai) *Se S soddisfa la condizione $(L^{\#})$, cioè è una superficie liscia, non iperpiana, contenuta in $\mathbf{P}^N$, con $N = 2n+1 \geq 5$, tale che*

$$\dim \mathrm{Osc}_x^n(S) = 2n \textit{ per ogni } x \in S,$$

allora S è uno scroll razionale normale bilanciato di grado $2n$.

Dimostriamo innanzitutto che S è sempre una superficie birazionalmente rigata.

Teorema 2.4.2 *Se S soddisfa la condizione $(L^{\#})$, allora S è birazionalmente rigata e $S \not\cong \mathbf{P}^2$.*

Dimostrazione: Per assurdo S non sia birazionalmente rigata e sia $K = K_S$ un suo divisore canonico. Consideriamo un modello minimale S' della superficie S; il morfismo birazionale

$$\phi : S \to S'$$

è composto da un numero finito $s \geq 0$ di scoppiamenti e valgono le relazioni

$$c_2(S) = c_2(S') + s;$$

$$K^2 = K_{S'}^2 - s.$$

Ora, poiché S' è minimale e non rigata, il lemma chiave, enunciato nella sezione 0.4, implica che $K_{S'}$ è nef. Si ottiene, dunque, $K_{S'}^2 \geq 0$ e $c_2(S') = e(S') \geq 0$. Inoltre, $H^2 > 0$, perché H è ampio, e $KH \geq 0$. Quest'ultima relazione è vera perché se fosse $KH < 0$, allora, per ogni intero n, l'n-esimo plurigenere di S sarebbe nullo, $P_n(S) = 0$, ma ciò implicherebbe, per il teorema di Enriques 0.4.1, che S è birazionalmente rigata, il che è falso. Sostituendo le espressioni trovate nella (2.2) otteniamo

$$(n-1)^2 c_2(S') + nc_1(S')^2 + 2(n+1)KH + 4H^2 = -s(n^2 - 3n + 1)$$

e vediamo che ciascun addendo del primo membro è non negativo; avremo allora

$$(n^2 - 3n + 1) \leq 0.$$

Se $n \geq 2$ si vede che $(n^2 - 3n + 1) > 0$ e quindi abbiamo un assurdo.
Se $n = 2$, la (2.2) dà

$$c_2(S) + (K + 2H)(2K + 2H) = 0,$$

cioè

$$c_2(S) + 2(K + H)^2 + 2KH + 2H^2 = 0$$

e poiché $c_2(S), KH \geq 0$ e $H^2 > 0$, si deve avere $(K + H)^2 < 0$, cioè $K + H$ non sarebbe nef e quindi $[K + H]$ non sarebbe spanned. Per il teorema 0.5.2, allora, la superficie S è il piano proiettivo, la superficie di Veronese o uno scroll, e tutte queste possibilità sono state escluse, da cui l'assurdo.
Vediamo subito, inoltre, che $S \ncong \mathbf{P}^2$ perché dalla (2.4) si ha che c_2 deve essere pari, mentre sappiamo che $c_2(\mathbf{P}^2) = e(\mathbf{P}^2) = 3$. $\square$

Dimostrazione del teorema 2.4.1 Diamo ora una dimostrazione del teorema di Ballico–Piene–Tai considerando separatamente diversi casi:

I caso: S superficie razionale con $n \geq 3$. Supponiamo $q = 0$. Poiché S è una superficie birazionalmente rigata, per il teorema 2.4.2, valgono le relazioni (2.8) e (2.9). Calcoliamo

$$(K + H)^2 = K^2 + 2(HK + H^2) - H^2 = -s + 4g + 4 - 2nl.$$

Eliminando s dalle (2.8) e (2.9), si ha

$$g = \frac{5n - 3}{n + 6}(l - 1),$$

inoltre dall'equazione (2.8) si ricava

$$s = \frac{4(n + 3)}{n + 6}(l - 1) \tag{2.10}$$

e utilizzando queste relazioni si trova

$$(K + H)^2 = -\frac{2}{n + 6}((n^2 - 2n + 12)l + 6(n - 4)).$$

Notiamo che $l \geq 1$, perché S non è iperpiana e

$$H^2 = \deg S \geq \operatorname{codim} S + 1 = 2n + 1 - 2 + 1 = 2n.$$

Poiché $n \geq 3$, si verifica che $(K + H)^2 < 0$, cioè che $[K + H]$ non è spanned. Per il teorema 0.5.2 S è uno scroll, perché non può essere il piano proiettivo o la superficie di Veronese. La superficie S è, allora, geometricamente rigata e quindi si ha $s = 0$. Dall'equazione 2.10, allora si ottiene $l = 1$, cioè $H^2 = 2n$. Questo significa che S è una superficie di grado $2n$ in $\mathbf{P}^{2n+1}$, cioè è una superficie di grado minimo. Per la classificazione delle superfici di grado minimo (sezione 0.4), allora, S è uno scroll razionale normale di grado $2n$. Per il teorema 1.6.4, infine, S è bilanciato.

II caso: S superficie geometricamente rigata. Combinando le equazioni (2.4) e (2.5), abbiamo

$$-3n(2n + 1)s + 2n(n + 3)KH + 2(n + 1)(n + 3)H^2 = 0. \tag{2.11}$$

Se poniamo $s = 0$, poiché S è geometricamente rigata, si ottiene

$$nKH + (n + 1)H^2 = 0$$

ovvero
$$2ng - 2n + H^2 = 0.$$
Ricordiamo che $H^2 \geq 2n$ e quindi deve essere $2ng \leq 0$, cioè $g = 0$ e $H^2 = 2n$. La superficie S, allora, è di grado minimo, diversa da $\mathbf{P}^2$ e dalla superficie di Veronese. In particolare S è uno scroll razionale normale di grado $2n$, e quindi è bilanciato per il teorema 1.6.4.

III caso: $n = 2$**.** Se $n = 2$, la (2.11) dà
$$-3s + 2HK + 3H^2 = 0,$$
mentre la (2.5) dà
$$5K^2 + 14KH + 11H^2 = 0.$$
Si ottiene, quindi, utilizzando le due relazioni trovate,
$$(K + H)^2 = K^2 + 2HK + H^2 = -\frac{6}{5}s.$$
Se fosse $s > 0$, avremmo $(K + H)^2 < 0$ e quindi, per il teorema 0.5.2, S sarebbe uno scroll, quindi una superficie minimale e ciò è assurdo perché sarebbe $s = 0$.
Deve essere, allora, $s = 0$, cioè S geometricamente rigata. Ci possiamo ricondurre, allora, al II caso già studiato.

IV caso: $n = 3$**.** Se $n = 3$, la (2.11) dà
$$-21s + 12HK + 16H^2 = 0,$$
mentre la (2.5) dà
$$7K^2 + 16KH + 12H^2 = 0.$$
Utilizzando le due relazioni trovate, si ottiene
$$(K + H)^2 = K^2 + 2HK + H^2 = -\frac{1}{2}s - \frac{1}{3}H^2.$$
Poiché $s \geq 0$, si ha
$$(K + H)^2 \leq -\frac{1}{3}H^2 < 0.$$
Applicando ancora il teorema 0.5.2, si ottiene che S è uno scroll, cioè una superficie geometricamente rigata e ci si riduce di nuovo al II caso.

V caso: S **superficie non razionale né geometricamente rigata, con** $n \geq 4$**.** Supponiamo che S sia una superficie birazionalmente rigata,

ma non geometricamente rigata, con $q > 0$ e $n \geq 4$. Il teorema 0.5.3 di Sommese–Van de Ven afferma che, se non ci sono rette eccezionali in S, cioè curve E tali che $EH = 1$ e $EK = -1$, allora $K + H$ è molto ampio, eccetto in alcuni casi speciali. Poiché S non è razionale non può essere una superficie di Del Pezzo e, non essendo geometricamente rigata, possiamo escludere anche l'ultimo caso del teorema.
Ora se, per assurdo, esistesse una curva eccezionale E tale che $EH = 1$ e $EK = -1$, usando la (2.7), si otterrebbe

$$QE = \frac{1}{n-1}(-2n + n + 3) = -\frac{n-3}{n-1}$$

e questa quantità non è un intero per $n \geq 4$. In S, quindi, non esistono rette eccezionali e possiamo applicare il teorema di Sommese–Van de Ven e, quindi, affermare che $K + H$ è molto ampio. Il teorema 0.5.2, applicato a tale divisore molto ampio, implica che $[K + (K + H)]$ è spanned, perché $(S, K + H)$ non può essere il piano proiettivo o la superficie di Veronese, perché la superficie S non è razionale, né uno scroll, perché S non è geometricamente rigata. Utilizzando ora le (2.5) e (2.11), si può calcolare

$$(2K + H)^2 = -\frac{54}{n+3} - 3\frac{n-4}{n}H^2,$$

da cui si deduce che, poiché $s > 0$ e $H^2 > 0$,

$$(2K + H)^2 < 0$$

per ogni $n \geq 4$ e ciò è assurdo, perché $[2K + H]$ è spanned. Dunque il V caso non sussiste. $\square$

Capitolo 3

Comportamento osculatorio degli scroll ellittici

3.1 Superfici geometricamente rigate ellittiche

Con *superficie geometricamente rigata ellittica* intendiamo una superficie geometricamente rigata S su una curva ellittica B. Sia $\pi : S \to B$ la corrispondente proiezione. Abbiamo $q(S) = g(B) = 1$ e quindi, per la disuguaglianza di Nagata, $e \geq -1$. Sappiamo che $S = \mathbf{P}(\mathcal{E})$, dove $\mathcal{E}$ è un fibrato vettoriale olomorfo di rango 2 su B e può essere scelto in modo che sia normalizzato, come spiegato nella sezione 0.2. Sia $e = -\deg\mathcal{E}$ l'invariante di $S = \mathbf{P}(\mathcal{E})$ e C_0 e f rispettivamente la sua sezione fondamentale e una fibra.

Proposizione 3.1.1 *Se $S = \mathbf{P}(\mathcal{E})$ è una superficie geometricamente rigata ellittica con $\mathcal{E}$ indecomponibile, allora $e = 0$ oppure -1 ed esiste esattamente una sola superficie per ciascuno dei due valori assunti da e.*

Dimostrazione: Si veda [Ha2, Ch. V, Theorem 2.15].

Descriviamo, ora, come si costruisce il fibrato $\mathcal{E}$ nei casi considerati dalla proposizione precedente.
Se $e = 0$, $\mathcal{E}$ è definito dall' estensione non banale

$$0 \to \mathcal{O}_B \to \mathcal{E} \to \mathcal{O}_B \to 0.$$

Se $e = -1$, $\mathcal{E}$ è definito dall' estensione non banale

$$0 \to \mathcal{O}_B \to \mathcal{E} \to \mathcal{O}_B(y) \to 0,$$

dove y è un punto di B. Si dimostra che se $\mathcal{E}'$ è definito dall'estensione non banale

$$0 \to \mathcal{O}_B \to \mathcal{E}' \to \mathcal{O}_B(y') \to 0,$$

dove $y' \in B$ e $y' \neq y$, allora $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ e $\mathbf{P}(\mathcal{E}')$ sono isomorfi.

Analizziamo, ora, il caso in cui il fibrato vettoriale $\mathcal{E}$ sia decomponibile. Ciò succede solo quando $e \geq 0$. Se $e = 0$, $\mathcal{E}$ può essere della forma

$$\mathcal{E} = \mathcal{O}_B \oplus \mathcal{O}_B$$

cioè $\mathbf{P}(\mathcal{E}) = B \times \mathbf{P}^1$, oppure della forma

$$\mathcal{E} = \mathcal{O}_B \oplus \mathcal{O}_B(\delta) \text{ con } \deg\delta = 0 \text{ e } \delta \neq 0,$$

e in tal caso esiste anche una seconda possibile normalizzazione data da

$$\mathcal{E}' = \mathcal{O}_B(-\delta) \oplus \mathcal{O}_B.$$

Se, infine, $e > 0$, una normalizzazione di $\mathcal{E}$ è costituita da

$$\mathcal{E} = \mathcal{O}_B \oplus \mathcal{O}_B(\epsilon),$$

dove $\epsilon \in \mathrm{Pic}(B)$ e $\deg\epsilon = -e$.

Introduciamo ora alcune osservazioni che ci saranno utili nelle sezioni seguenti e consideriamo, in particolare, le superfici geometricamente rigate ellittiche di invariante $e = -1$.

Proposizione 3.1.2 *Se S è una superficie geometricamente rigata ellittica di invariante -1, la sezione fondamentale varia in una famiglia algebrica $\mathcal{F} = \{C_b\}$ isomorfa alla curva ellittica base B.*

Dimostrazione: Sia $S = \mathbf{P}(\mathcal{E})$, dove $\mathcal{E}$ è definito dall'estensione non banale

$$0 \to \mathcal{O}_B \to \mathcal{E} \to \mathcal{O}_B(y_0) \to 0,$$

con y_0 punto di B. Per ogni altro punto $b \in B$ possiamo considerare la relativa estensione non banale

$$0 \to \mathcal{O}_B \to \mathcal{E}_b \to \mathcal{O}_B(b) \to 0$$

e si può osservare che $\mathcal{E}_b = \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_B(b - y_0)$, da cui si ricava $\mathbf{P}(\mathcal{E}) \cong \mathbf{P}(\mathcal{E}')$. Per ogni punto $b \in B$, possiamo considerare il fibrato lineare $\mathcal{L} = \mathcal{O}_B(b)$ su B e sappiamo che ogni fibrato lineare è di questa forma. Ad $\mathcal{L}$ possiamo associare il corrispondente fibrato $\mathcal{E}_b$ e ad esso la relativa sezione fondamentale C_b. Sappiamo che i fibrati $\mathcal{E}_b$ e le sezioni C_b sono in corrispondenza biunivoca, in virtù della proposizione 2.6 di [Ha2, Ch. V]. Si costruisce, infatti, una corrispondenza biunivoca che associa a una sezione $\sigma : B \to S$ la suriezione $\mathcal{E} \to \mathcal{L} \to 0$, dove $\mathcal{L}$ è il fibrato lineare olomorfo su B dato da $\mathcal{L} = \sigma^* \mathcal{O}_S(1)$. Otteniamo, così, che le possibili sezioni fondamentali sono parametrizzate dai punti $b \in B$. $\square$

Osserviamo che per ogni punto $p \in S$ esiste una curva C_b della famiglia $\mathcal{F}$ tale che $p \in C_b$. (In realtà ne esistono due per ogni punto p generico.) Ricordiamo, inoltre, che l'equivalenza algebrica di C_b e $C_{b'}$ implica l'equivalenza in coomologia $[C_b] = [C_{b'}]$ in $H^2(S, \mathbf{Z})$ e quindi quella numerica $C_b \equiv C_{b'}$.
La seguente proposizione ci sarà utile in seguito:

Proposizione 3.1.3 *Sia S come nella proposizione precedente. Un divisore D numericamente equivalente a $C_0 - f$ non è effettivo.*

Dimostrazione: Per assurdo $D \equiv C_0 - f$ sia effettivo e y sia un suo punto. Consideriamo una sezione $C_b \in \mathcal{F}$ che contenga il punto y. Dimostriamo ora che C_b e D sono curve irriducibili e distinte:
(i) D è irriducibile perché se non lo fosse sarebbe l'unione di due curve effettive A e B e, allora,

$$1 = fD = f(A + B) = fA + fB$$

con $fA, fB \geq 0$. Sia, dunque, $fA = 1$ e $fB = 0$. Dall'ultima relazione si deduce che B non può essere una curva effettiva che interseca le fibre, ma deve essere contenuta in un'unione di fibre, cioè esiste un intero $k > 0$ tale che $B \equiv kf$. Ora $A = D - B \equiv C_0 - f - kf$ e quindi

$$C_0 A = C_0(C_0 - f - kf) = 1 - 1 - k = -k < 0,$$

ma questo è assurdo perché C_0 è ampio e A è effettivo.
(ii) C_b e D sono curve distinte perché

$$C_b^2 = C_0^2 = 1,$$

mentre

$$D^2 = (C_0 - f)^2 = -1.$$

Ora, poiché C_b e D sono due curve irriducibili e distinte, si deve avere $C_bD \geq 0$, anzi $C_bD \geq 1$ poiché $\{y\} \subseteq C_b \cap D$, ma

$$C_bD = C_0D = C_0(C_0 - f) = 1 - 1 = 0.$$

Si ha così un assurdo. $\square$

Concludiamo questa sezione con il seguente risultato. (Si confronti anche [MP, Proposition 9])

Proposizione 3.1.4 *Sia S una superficie geometricamente rigata di invariante e su una curva ellittica B e sia δ un divisore B, allora il sistema lineare $\mid C_0 + \pi^*\delta \mid$ è molto ampio se e solo se* $\deg\delta \geq e + 3$.

Dimostrazione: Sia $\mid L \mid = \mid C_0 + \pi^*\delta \mid$ molto ampio con $\deg\delta = m$. Se consideriamo la restrizione di L alla sezione fondamentale C_0, si deve ottenere un divisore molto ampio, cioè di grado maggiore o uguale a 3, perché C_0 è una curva ellittica. Questo significa che

$$\deg(L)_{C_0} = C_0(C_0 + mf) = -e + m \geq 3,$$

cioè $m \geq e + 3$.

Viceversa, si può dimostrare che se $\deg\delta \geq e + 3$, allora il sistema lineare $\mid L \mid = \mid C_0 + \pi^*\delta \mid$ è molto ampio [Ha2, Ch. V, Ex. 2.12]. Trattiamo qui solo il caso in cui l'invariante e sia -1, utilizzando il teorema di Reider 0.5.1. Poiché, infatti, abbiamo $L \equiv C_0 + mf$, con $m \geq 2$, e $K_S \equiv -2C_0 + f$, si calcola

$$M = L - K_S \equiv 3C_0 + (m-1)f.$$

Si verifica subito che M è nef, per la proposizione 0.2.3, e che $M^2 \geq 15 > 10$. Le condizioni per poter applicare il teorema di Reider, allora, sono soddisfatte e dunque il sistema $\mid L \mid$ è molto ampio, a meno che esista un divisore effettivo $D \equiv aC_0 + bf$, con $a, b \in \mathbf{Z}$, che soddisfi una delle seguenti condizioni:

(i) $DM = 0$, $D^2 = -1$,
(ii) $DM = 0$, $D^2 = -2$,
(iii) $DM = 1$, $D^2 = 0$,
(iv) $DM = 1$, $D^2 = -1$,
(v) $DM = 2$, $D^2 = 0$.

Esaminiamo, ora le diverse possibilità e mostriamo che portano tutte ad un assurdo.

(i) Le due uguaglianze danno $(m+2)a + 3b = 0$ e $a(a+2b) = -1$. Poichè

D è effettivo si deve avere $a > 0$ e quindi la soluzione è $a = 1, b = -1$, ma questo implicherebbe $m = 1$, assurdo perché $m \geq 2$.
(ii) Le due uguaglianze danno $(m+2)a + 3b = 0$ e $a(a+2b) = -2$. Si ha quindi $a = 1, 2b = -3$, assurdo perché $b \in \mathbf{Z}$, oppure $a = 2, 2b = -3$, assurdo per lo stesso motivo.
(iii) Le due uguaglianze danno $(m+2)a + 3b = 1$ e $a(a+2b) = 0$. Si ottiene, quindi, $a = -2b$ e $(2m+1)b = -1$, e la seconda equazione non ha soluzioni intere per $m \geq 2$.
(iv) Le due uguaglianze danno $(m+2)a + 3b = 1$ e $a(a+2b) = -1$. Come nel primo caso si ha $a = 1, b = -1$, con $m = 2$. Il divisore $D \equiv C_0 - f$, però, non è effettivo, come abbiamo dimostrato nella proposizione 3.1.3.
(v) Le due uguaglianze danno $(m+2)a + 3b = 2$ e $a(a+2b) = 0$. Si ottiene, allora, $a = -2b$ e $b(2m+1) = 2$, e la seconda equazione non ammette soluzioni intere.
Tutti i cinque casi sono, quindi, da escludere e perciò possiamo concludere che il sistema $\mid C_0 + \pi^*\delta \mid$ è molto ampio. $\square$

3.2 Scroll ellittico di invariante -1 in $\mathbf{P}^6$

Consideriamo la superficie geometricamente rigata $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ con invariante $e = -1$, dove $\mathcal{E}$ è un fibrato vettoriale di rango 2 sulla curva ellittica B. Sia δ un divisore su B di grado 3 e consideriamo il divisore di S

$$L := C_0 + \pi^*\delta \equiv C_0 + 3f.$$

L è molto ampio per la proposizione 3.1.4 perché

$$3 = \deg \delta \geq e + 3 = 2.$$

Sia allora $S := \varphi_{|L|}(\mathbf{P}(\mathcal{E}))$.

Proposizione 3.2.1 *S è una superficie di grado 7 immersa in $\mathbf{P}^6$.*

Dimostrazione: Ricordando che $C_0^2 = -e = 1$, $C_0 f = 1$ e $f^2 = 0$ otteniamo

$$\deg S = L^2 = (C_0 + 3f)^2 = 7.$$

Per calcolare la dimensione dello spazio di immersione tensorizziamo la successione esatta che definisce $\mathcal{E}$

$$0 \to \mathcal{O}_B \to \mathcal{E} \to \mathcal{O}_B(y) \to 0, \tag{3.1}$$

con il fibrato vettoriale $\mathcal{O}_B(\delta)$, ottenendo

$$0 \to \mathcal{O}_B(\delta) \to \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_B(\delta) \to \mathcal{O}_B(y+\delta) \to 0.$$

Poiché il grado del divisore δ è positivo e $g(B) = 1$, $h^1(\mathcal{O}_B(\delta)) = 0$ e quindi

$$h^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_B(\delta)) = h^0(\mathcal{O}_B(\delta)) + h^0(\mathcal{O}_B(y+\delta)) = 3 + 4 = 7,$$

usando la formula di Riemann-Roch per il calcolo finale. Ora $h^0(L) = h^0(C_0 + \pi^*\delta) = h^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_B(\delta)) = 7$ per la proposizione 0.2.4 e quindi

$$\dim \mid L \mid = h^0(L) - 1 = 6.$$

□

Osserviamo, infine, che S è uno scroll perché le sue fibre hanno grado 1, infatti

$$fL = f(C_0 + 3f) = 1,$$

quindi per la proposizione 1.3.1 $\mathrm{Osc}^2_x(S) \leq 4$ per ogni $x \in S$. Dimostreremo ora che in realtà $\mathrm{Osc}^2_x(S) = 4$ per ogni $x \in S$, quindi S costituisce un controesempio alla seconda parte della congettura di Piene–Tai 1.6.3. Per dimostrare ciò premettiamo due lemmi. Utilizzeremo, d'ora in poi, le notazioni introdotte nella sezione 1.5.

Lemma 3.2.2 *Per ogni $x \in S$ vale la seguente uguaglianza*

$$\dim \mid L - 3x \mid = \dim \mid L - 2f_x - x \mid,$$

dove f_x è la fibra passante per il punto x.

Dimostrazione: E' ovvio che

$$\mid L - 2f_x - x \mid \subseteq \mid L - 3x \mid .$$

Se $H \in \mid L - 3x \mid$ ha un punto triplo in x, inoltre, dal lemma 0.3.4, viene immediatamente che $H \in \mid L - 2f_x - x \mid$, e dunque

$$\mid L - 2f_x - x \mid = \mid L - 3x \mid,$$

in particolare i due spazi hanno la stessa dimensione. □

Lemma 3.2.3 *Il fibrato $[L - 2f_x]$ è spanned.*

Dimostrazione: Per assurdo $[L - 2f_x]$ non sia spanned in un punto $y \in S$, cioè y sia un punto base per $\mid L - 2f_x \mid$. Consideriamo il divisore $M := L - 2f_x - K_S$ e ricordiamo che $K_S \equiv -2C_0 + f_x$. Si verifica che M è nef perché

$$M \equiv C_0 + 3f_x - 2f_x + 2C_0 - f_x = 3C_0,$$

che è addirittura ampio e, inoltre,

$$M^2 = 9 > 5.$$

Sono soddisfatte, allora, le ipotesi del teorema di Reider, per cui, poiché $\mid M + K_S \mid = \mid L - 2f_x \mid$ ha un punto base in y, esiste un divisore effettivo D, $y \in D$, tale che
(i) $DM = 0$, $D^2 = -1$
oppure
(ii) $DM = 1$, $D^2 = 0$.
Dobbiamo mostrare che entrambi questi casi sono impossibili, cioè che non può esistere un tale divisore. Sia allora $D \equiv aC_0 + bf_x$, con $a, b \in \mathbf{Z}$ un divisore che verifica (i) oppure (ii) e mostriamo che si avrà un assurdo.
Caso (i):

$$0 = DM = (aC_0 + bf_x)(3C_0) = 3(a + b)$$

quindi $b = -a$, $D = a(C_0 - f_x)$, inoltre

$$-1 = D^2 = a^2(C_0 - f_x)^2 = -a^2$$

da cui si ricava $a = 1$. L'unica possibilità, allora, è che sia $D \equiv C_0 - f_x$, ma un tale divisore non è effettivo, come abbiamo dimostrato nella proposizione 3.1.3.
Caso (ii):

$$1 = DM = 3(a + b)$$

e ciò è assurdo perché $a + b$ è un intero.
Abbiamo così dimostrato che $\mid L - 2f_x \mid$ non può avere punti base in nessun punto y, cioè $[L - 2f_x]$ è spanned. □

Teorema 3.2.4 *La dimensione del secondo spazio osculatore a S è 4 in ogni punto $x \in S$.*

Dimostrazione: Per la definizione del secondo spazio osculatore come proiettivizzato dell'immagine di $j_{2,x}$, basterà mostrare che, per ogni $x \in S$, $\mathrm{Im} j_{2,x}$ ha dimensione 5, cioè che $\mathrm{rk} j_{2,x} = 5$. Ricordiamo che $j_{2,x}$ è definito dall'omomorfismo di fasci

$$j_2 : H^0(L) \otimes \mathcal{O}_X \to J_2 L.$$

Per il teorema di nullità più rango, allora,

$$\mathrm{rk} j_{2,x} = h^0(L) - \dim \mathrm{Ker} j_{2,x}.$$

Nella dimostrazione della proposizione 3.2.1 abbiamo calcolato $h^0(L) = 7$. Si tratta allora di calcolare dim Ker $j_{2,x}$. Abbiamo osservato come conseguenza della proposizione 1.2.2 che, se una sezione s appartiene al nucleo di $j_{2,x}$, essa si annulla nel punto x con le sue derivate parziali di ordine primo e secondo, quindi ha in x un punto di molteplicità almeno 3. Se, d'altra parte, s ha in x un punto di molteplicità almeno 3, allora naturalmente $j_{2,x}(s) = 0$. Questo significa che

$$\mathbf{P}(\mathrm{Ker} j_{2,x}) = \mid L - 3x \mid$$

e perciò

$$\dim \mathbf{P}(\mathrm{Ker} j_{2,x}) = \dim \mid L - 3x \mid .$$

Utilizzando ora i due lemmi precedenti, abbiamo le seguenti uguaglianze:

$$\dim \mid L - 3x \mid = \dim \mid L - 2f_x - x \mid = \dim \mid L - 2f_x \mid -1.$$

Calcoliamo ora

$$\dim \mid L - 2f_x \mid = h^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_B(\delta - 2x')) - 1$$

dove x' è la proiezione di x sulla curva base B. Tensorizzando la successione (3.1) con il fascio $\mathcal{O}_B(\delta - 2x')$, si trova

$$0 \to \mathcal{O}_B(\delta - 2x') \to \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_B(\delta - 2x') \to \mathcal{O}_B(y + \delta - 2x') \to 0$$

e, poiché $\deg(\delta - 2x') = 1 > 0$ sappiamo che $h^1(\delta - 2x') = 0$. Quindi

$$h^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_B(\delta - 2x')) = h^0(\mathcal{O}_B(\delta - 2x')) + h^0(\mathcal{O}_B(y + \delta - 2x')) = 1 + 2 = 3.$$

Ne viene, allora, che

$$\dim \mid L - 3x \mid = \dim \mid L - 2f_x \mid -1 = h^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_B(\delta - 2x')) - 2 = 3 - 2 = 1.$$

Questo significa che $\dim \mathbf{P}(\mathrm{Ker} j_{2,x}) = 1$ e che, naturalmente, $\dim \mathrm{Ker} j_{2,x} = 2$. Possiamo concludere quindi che

$$\mathrm{rk} j_{2,x} = h^0(L) - \dim\ \mathrm{Ker} j_{2,x} = 7 - 2 = 5.$$

□

3.3 Scroll ellittico di invariante -1 in $\mathbf{P}^{2m}$

Gli scroll ellittici di invariante -1 linearmente normali forniscono un controesempio alla seconda parte della congettura di Piene–Tai non solo nel caso che lo spazio abbia dimensione 6, ma per ogni dimensione pari. Per mostrare questo basta ripetere la dimostrazione vista nel paragrafo precedente con le dovute generalizzazioni.
Sia dunque $\mathbf{P}(\mathcal{E})$, come nella sezione precedente, il $\mathbf{P}^1$-bundle sulla curva ellittica B con $e = -1$. Sia δ un divisore di B di grado $m \geq 3$ e

$$L := C_0 + \pi^*\delta \equiv C_0 + mf.$$

Il divisore L è molto ampio per la proposizione 3.1.4 perché

$$m = \deg\ \delta \geq e + 3 = 2.$$

Sia, come prima, $S := \varphi_{|L|}(\mathbf{P}(\mathcal{E}))$.

Proposizione 3.3.1 *S è una superficie di grado $2m+1$ immersa in $\mathbf{P}^{2m}$.*

Dimostrazione: Si calcola facilmente che

$$\deg\ S = L^2 = (C_0 + mf)^2 = 1 + 2m.$$

Per calcolare la dimensione dello spazio di immersione, tensorizziamo la successione esatta (3.1), che definisce $\mathcal{E}$, con il fibrato vettoriale $\mathcal{O}_B(\delta)$, ottenendo

$$0 \to \mathcal{O}_B(\delta) \to \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_B(\delta) \to \mathcal{O}_B(y + \delta) \to 0.$$

Si ha $h^1(\mathcal{O}_B(\delta)) = 0$, perché il grado del divisore δ è positivo, e quindi

$$h^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_B(\delta)) = h^0(\mathcal{O}_B(\delta)) + h^0(\mathcal{O}_B(y + \delta)) = m + (m + 1) = 2m + 1$$

Ora $h^0(L) = h^0(C_0 + \pi^*\delta) = h^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_B(\delta)) = 2m + 1$ per la proposizione 0.2.4 e quindi

$$\dim \mid L \mid = h^0(L) - 1 = 2m.$$

□

Abbiamo immerso allora S nello spazio $\mathbf{P}^{2m}$ come uno scroll, infatti

$$fL = f(C_0 + mf) = 1,$$

quindi $\dim \operatorname{Osc}_x^2(S) \leq 4$ per ogni $x \in S$, cioè

$$\dim \operatorname{Osc}_x^k(S) \leq 2k \quad \text{per ogni } k \geq 2, \ \text{per ogni } x \in S. \qquad (*)$$

Dimostreremo ora, seguendo un ragionamento analogo a quello presentato in precedenza, che le relazioni in $(*)$ sono delle uguaglianze, cioè che la superficie S soddisfa la condizione $(L^{\#})$. Calcolando $n = \left[\frac{N-1}{2}\right]$ vediamo che $n = m-1$, perciò dovremo verificare che $\dim \operatorname{Osc}_x^{m-1}(S) = 2(m-1)$ per ogni $x \in S$.
I lemmi 3.2.2 e 3.2.3 si generalizzano facilmente nel modo seguente

Lemma 3.3.2 *Per ogni $x \in S$ vale la seguente uguaglianza*

$$\dim \mid L - mx \mid = \dim \mid L - (m-1)f_x - x \mid,$$

dove f_x è la fibra per x.

Dimostrazione: Si ripete la dimostrazione del lemma 3.2.2, utilizzando sempre il lemma 0.3.4. □

Lemma 3.3.3 *Il fibrato $[L - (m-1)f_x]$ è spanned.*

Dimostrazione Per assurdo $[L - (m-1)f_x]$ non sia spanned in un punto $y \in S$, cioè $\mid L - (m-1)f_x \mid$ abbia in y un punto base, e consideriamo il divisore $M := L - (m-1)f_x - K_S$. Si verifica che M è nef perché

$$M \equiv C_0 + mf_x - (m-1)f_x + 2C_0 - f_x = 3C_0,$$

che è addirittura ampio e, inoltre,

$$M^2 = 9 > 5.$$

Applicando ancora il teorema di Reider e seguendo lo stesso procedimento visto nel lemma 3.2.3, si arriva a concludere che il fibrato $[L - (m-1)f_x]$ deve essere spanned. Notiamo, infatti, che il divisore M non dipende da m e dunque il ragionamento visto nel caso $m = 3$ è ancora valido. □

Teorema 3.3.4 *La dimensione dello $(m-1)$-esimo spazio osculatore a S è $2(m-1)$ in ogni punto $x \in S$.*

Dimostrazione: Dobbiamo dimostrare che $\dim \mathrm{Osc}_x^{m-1}(S) = 2(m-1)$, ovvero che, per ogni $x \in S$, $\mathrm{Im} j_{m-1,x}$ ha dimensione $2(m-1)+1 = 2m-1$, cioè che $\mathrm{rk} j_{m-1,x} = 2m-1$.
Applicando ancora il teorema di nullità più rango,abbiamo

$$\mathrm{rk} j_{m-1,x} = h^0(L) - \dim \mathrm{Ker} j_{m-1,x}.$$

Nella dimostrazione della proposizione 3.3.1 abbiamo già calcolato che $h^0(L) = 2m+1$. Sappiamo che gli elementi del nucleo di $j_{m-1,x}$ sono le sezioni che hanno in x un punto di molteplicità almeno m, cioè

$$\mathbf{P}(\mathrm{Ker} j_{m-1,x}) = \mid L - mx \mid$$

e perciò

$$\dim \mathbf{P}(\mathrm{Ker} j_{m-1,x}) = \dim \mid L - mx \mid .$$

Utilizzando ora i lemmi 3.3.2 e 3.3.3, abbiamo le seguenti uguaglianze:

$$\dim \mid L - mx \mid = \dim \mid L - (m-1)f_x - x \mid = \dim \mid L - (m-1)f_x \mid -1.$$

Calcolando

$$\dim \mid L - (m-1)f_x \mid = h^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_B(\delta - (m-1)x')) - 1,$$

dove x' è la proiezione di x sulla curva base B, e tensorizzando sempre la successione (3.1) con il fascio $\mathcal{O}_B(\delta - (m-1)x')$, si trova

$$0 \to \mathcal{O}_B(\delta - (m-1)x') \to \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_B(\delta - (m-1)x') \to \mathcal{O}_B(y + \delta - (m-1)x') \to 0.$$

Poiché $\deg(\delta - (m-1)x') = m - (m-1) = 1 > 0$ sappiamo che

$$h^1(\delta - (m-1)x') = 0,$$

e quindi

$$\dim \mid L - (m-1)f_x \mid = h^0(\mathcal{O}_B(\delta - (m-1)x')) + h^0(\mathcal{O}_B(y + \delta - (m-1)x')) - 1 =$$

$$(m - m + 1) + (1 + m - m + 1) - 1 = 2.$$

Si ottiene, allora, $\dim \mid L - mx \mid = 2 - 1 = 1$, cioè

$$\dim \mathrm{Ker} j_{m-1,x} = 2.$$

Possiamo concludere quindi che

$$\mathrm{rk} j_{m-1,x} = h^0(L) - \dim \mathrm{Ker} j_{m-1,x} = 2m + 1 - 2 = 2m - 1$$

come si voleva mostrare. □

3.4 Scroll ellittici con invariante non negativo

E' interessante notare che il controesempio trovato ha un comportamento eccezionale, infatti proveremo che nessuno scroll ellittico linearmente normale con $e \geq 0$ soddisfa la condizione $(L^{\#})$.
Sia $S = \mathbf{P}(\mathcal{E})$ lo scroll ellittico con invariante $e \geq 0$ immerso dal divisore molto ampio $L = C_0 + \pi^*\delta$ dove δ è un divisore sulla curva base B di grado $m \geq e + 3$ e C_0 è una sua sezione fondamentale fissata. S è, dunque, una superficie di grado $L^2 = -e + 2m$ in $\mathbf{P}^{2m-e-1}$.
La condizione $(L^{\#})$ implica, in particolare, che

$$\dim \mathrm{Osc}_x^n(S) = 2n \text{ per ogni } x \in S$$

ove $n = \left[\frac{N-1}{2}\right]$. Nel nostro caso $n = \left[\frac{2m-e-1-1}{2}\right] = \left[m - 1 - \frac{e}{2}\right]$.

Lemma 3.4.1 *Esiste una fibra $\overline{f}$ di S tale che il fibrato $[L - n\overline{f}]$ non è spanned.*

Dimostrazione: Sia $y \in S$ e f_y la fibra per y. Se consideriamo la restrizione del fibrato $[L - nf_y]$ alla curva C_0, si ha che

$$\deg(L - nf_y)_{C_0} = C_0(L - nf_y) = C_0(C_0 + (m - n)f_y) = -e + m - n.$$

Ricordando che $n = \left[m - 1 - \frac{e}{2}\right]$ e che $e \geq 0$, si calcola, allora, che

$$\deg(L - nf_y)_{C_0} \leq 1,$$

ma, poiché C_0 è una curva ellittica, questo implica che il fibrato $[L - nf_y]$ non è spanned sulla curva C_0, a meno che esso sia il fibrato banale $\mathcal{O}_{C_0}$. Ciò può succedere solo nel caso in cui

$$\deg(L - nf_y)_{C_0} = -e + m - n = 0$$

e quindi solo se $m - e = \left[m - 1 - \frac{e}{2}\right]$, cioè per $e = 2$ o 3. Se dunque l'invariante e è diverso da 2 o 3, per ogni punto $y \in S$ il fibrato $[L - nf_y]$ non è spanned sulla curva C_0 e quindi neppure sulla superficie S.
Consideriamo ora i casi $e = 2$ o 3 e $n = m - e$. Se per un punto $y \in S$ il fibrato $[L - nf_y]$ ristretto a C_0 è il fibrato banale, allora

$$\mathcal{O}_{C_0} = (L - nf_y)_{C_0} = (C_0 + \pi^*(\delta - ny'))_{C_0},$$

dove $y' = \pi(y)$. Si ha, cioè,

$$\mathcal{O}_B(\epsilon + \delta - ny') = \mathcal{O}_B,$$

dove ϵ è il divisore su B associato al fibrato lineare $\det\mathcal{E}$, e questo implica che $ny' \in \mid \delta + \epsilon \mid$. Supponiamo, per assurdo, che per ogni $y \in S$ il fibrato $[L - nf_y]$ ristretto a C_0 sia banale. Questo implicherebbe che $ny' \in \mid \delta + \epsilon \mid$ per ogni $y' \in S$, ma ciò è assurdo perchè $\mid \delta + \epsilon \mid$ è molto ampio e permette di immergere B come curva ellittica in $\mathbf{P}^{n-1}$. Si può osservare, allora, che i punti $b \in B$ tali che $nb \in \mid \delta + \epsilon \mid$ sono un numero finito (esattamente n^2) e dunque è possibile scegliere un punto $b \in B$, tale che $nb \notin \mid \delta + \epsilon \mid$ e porre $y \in \pi^{-1}(b)$. Per tale y si avrà, allora, che il fibrato $[L - nf_y]$ non è spanned sulla curva C_0 e quindi non è neppure spanned sulla superficie S. Ponendo allora $\overline{f} = f_y$, si ha l'enunciato. $\square$
Osserviamo che per la generica fibra $\overline{f}$ il fibrato $[L - n\overline{f}]$ non è spanned.

Teorema 3.4.2 *S non soddisfa la condizione $(L^{\#})$, infatti esistono punti $x \in S$ tali che*

$$\dim \mathrm{Osc}_x^n(S) < 2n.$$

Dimostrazione: Per il lemma precedente sappiamo che il sistema lineare $\mid L - nf_x \mid$ ammette punti base sulla curva C_0. Sia x uno di tali punti base e calcoliamo

$$\dim \mathbf{P}(\mathrm{Ker} j_{n,x}) = \dim \mid L - (n+1)x \mid = \dim \mid L - nf_x - x \mid,$$

ma, poiché x è un punto base per $\mid L - nf_x \mid$, si ha

$$\dim \mid L - nf_x - x \mid = \dim \mid L - nf_x \mid .$$

Per calcolare quest'ultima quantità dobbiamo distinguere i casi (i) $e = 0$ e (ii) $e > 0$.

(i) Se $e = 0$ e $\mathcal{E}$ è indecomponibile, tensorizzando la successione

$$0 \to \mathcal{O}_B \to \mathcal{E} \to \mathcal{O}_B \to 0,$$

con il fascio $\mathcal{O}_B(\delta - nx')$, dove x' è la proiezione di x sulla curva base, si ottiene

$$0 \to \mathcal{O}_B(\delta - nx') \to \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_B(\delta - nx') \to \mathcal{O}_B(\delta - nx') \to 0.$$

Poiché

$$\deg \mathcal{O}_B(\delta - nx') = m - n = m - (m-1) = 1 > 0$$

si ha $h^1(\mathcal{O}_B(\delta - nx')) = 0$ e pertanto

$$h^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_B(\delta - nx')) = 2h^0(\mathcal{O}_B(\delta - nx')) = 2m - 2n.$$

Se, invece, $\mathcal{E}$ si decompone si calcola facilmente che

$$h^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_B(\delta - nx')) = 2m - 2n.$$

(ii) Se $e > 0$ allora il fibrato vettoriale $\mathcal{E}$ si può sempre decomporre come $\mathcal{E} = \mathcal{O}_B \oplus \mathcal{O}_B(\epsilon)$, dove $\epsilon \in \mathrm{Div}(B)$ e $\deg \epsilon = -e$, e dunque

$$h^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_B(\delta - nx')) = (m - n - e) + (m - n) = 2m - 2n - e.$$

Quest'ultima formula è valida in generale, perché comprende anche la precedente.
Abbiamo allora, in entrambi i casi,

$$\dim \mid L - nf_x \mid = h^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_B(\delta - nx')) - 1 = 2m - 2n - e - 1,$$

da cui si ha $\dim \mathbf{P}(\mathrm{Ker} j_{n,x}) = 2m - 2n - e - 1$, cioè $\dim \mathrm{Ker} j_{n,x} = 2m - 2n - e$ e quindi, per il teorema di nullità più rango,

$$\mathrm{rk} j_{n,x} = h^0(L) - \dim \mathrm{Ker} j_{n,x} = 2m - e - (2m - 2n - e) = 2n.$$

Si ottiene, quindi,

$$\dim \mathrm{Osc}^n_x(S) = 2n - 1,$$

e, quindi, se $e \geq 0$ lo scroll ellittico non soddisfa la condizione richiesta da $(L^{\#})$, come si voleva mostrare. $\square$

3.5 Altri modelli della superficie geometricamente rigata ellittica di invariante -1

Consideriamo ora la superficie geometricamente rigata $S = \mathbf{P}(\mathcal{E})$, dove $\mathcal{E}$ è un fibrato vettoriale olomorfo di rango 2 sulla curva ellittica B, di invariante $e = -1$, immersa in modo da non dare origine a uno scroll. In particolare studieremo i due casi:

$$(i)\ X = \varphi_{|L'|}(S) \text{ con } L' = 2C_0 + f,$$

$$(ii)\ Y = \varphi_{|L''|}(S) \text{ con } L'' = 3C_0.$$

Caso (i): X è un *fibrato in coniche*, cioè $L'_{|f} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2)$, infatti

$$(2C_0 + f)f = 2.$$

Inoltre X è una superficie di grado 8 perché

$$(L')^2 = (2C_0 + f)^2 = 8.$$

Calcoliamo ora la dimensione dello spazio di immersione, cioè $h^0(L') - 1$. Sappiamo che $K_X = -2C_0 + f$ e $L' = 2C_0 + f = K_X + 4C_0$. Il divisore $4C_0$ è ampio per la proposizione 0.2.2 e dunque il teorema di annullamento di Kodaira implica

$$h^1(L') = h^2(L') = 0 \text{ e } h^0(L') = \chi(L').$$

Applicando, ora, il teorema di Riemann-Roch, si ottiene

$$\chi(L') = \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{1}{2}((L')^2 - L'K_X) =$$

$$= (1 - q + p_g) + \frac{1}{2}(8 - (2C_0 + f)(-2C_0 + f)) = 0 + \frac{1}{2}(8 + 4) = 6,$$

cioè

$$X \subset \mathbf{P}^5$$

Caso (ii): Y è un *fibrato in cubiche*, cioè $L''_{|f} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(3)$, infatti

$$(3C_0)f = 3.$$

Inoltre Y è una superficie di grado 9 perché

$$(L')^2 = (3C_0)^2 = 9.$$

Calcoliamo ora la dimensione dello spazio di immersione. Sappiamo che $K_Y = -2C_0 + f$ e $L'' = 3C_0 = K_Y + 5C_0 - f$. Il divisore $5C_0 - f$ è ampio per la proposizione 0.2.2 e dunque il teorema di annullamento di Kodaira implica

$$h^1(L'') = h^2(L'') = 0 \text{ e } h^0(L'') = \chi(L'').$$

Applicando, ora, il teorema di Riemann-Roch, si ottiene

$$\chi(L'') = \chi(\mathcal{O}_Y) + \frac{1}{2}((L'')^2 - L''K_Y) =$$

$$= (1 - q + p_g) + \frac{1}{2}(9 - 3C_0(-2C_0 + f)) = 0 + \frac{1}{2}(9 + 3) = 6,$$

cioè

$$Y \subset \mathbf{P}^5.$$

X e Y, allora, sono due superfici in $\mathbf{P}^5$ e, per la proposizione che segue, possiamo affermare che non sono 2-regolari, cioè il loro spazio osculatore non ha rango massimo 6 in ogni punto. Infatti vale la seguente

Proposizione 3.5.1 *In $\mathbf{P}^5$ l'unica superficie 2-regolare è la superficie di Veronese.*

Dimostrazione: Per assurdo sia (S, L, V) una superficie 2-regolare, diversa dalla superficie di Veronese, contenuta in $\mathbf{P}(V) = \mathbf{P}^5$. La proposizione (2.8) di [LM1] afferma che se (S, L, V) è k-regolare per qualche $V \subseteq H^0(L)$, allora

$$\dim V \geq \binom{2+k}{k}$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $(S, L, V) = (\mathbf{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(k), H^0(L))$. Applicando tale osservazione nel nostro caso, avremmo che, poiché $\dim V = 6 = \binom{4}{2}$, allora (S, L, V) deve essere la superficie di Veronese. $\square$

Sappiamo, allora, che X e Y contengono punti di iperosculazione, cioè punti x tali che

$$\dim \mathrm{Osc}_x^2(S) \leq 4,$$

dove $S = X$ oppure Y. Studiamo ora esplicitamente alcuni di questi punti. Notiamo che il confronto con lo studio condotto da Shifrin [S] sul comportamento osculatorio di superfici in $\mathbf{P}^5$ può portare a ulteriori osservazioni.
Ogni sezione C_b, algebricamente equivalente alla sezione fondamentale, viene immersa in X e in Y come una cubica piana, infatti

$$C_b(2C_0 + f) = C_0(2C_0 + f) = 3$$

e parimenti

$$C_b(3C_0) = C_0(3C_0) = 3.$$

Denoteremo con $S = X, Y$ e con $L = L', L''$, perché il comportamento nei due casi è analogo. Sia, dunque, y un flesso della cubica C_b e scegliamo coordinate locali (z, w) sulla superficie S, centrate in y, tali che z sia una coordinata locale su C_b ed essa sia definita localmente dall'annullarsi di w. Sia ora $s \in H^0(L)$ una sezione generica che si annulla in y e il cui luogo di zeri ha come tangente in y la tangente di flesso di C_b. Lo sviluppo locale al punto y di s è quindi

$$s = a_3 z^3 + a_4 z^4 + \ldots + w\sigma(z, w),$$

dove σ è una funzione olomorfa in un intorno di y. Se ora calcoliamo il 2-getto di tale sezione al punto y, abbiamo

$$j_{2,y}(s) = \begin{pmatrix} a_3 z^3 + a_4 z^4 + \ldots + w\sigma(z, w) \\ 3a_3 z^2 + 4a_4 z^3 + \ldots + w\frac{\partial\sigma(z,w)}{\partial z} \\ \sigma(z, w) + w\frac{\partial\sigma(z,w)}{\partial w} \\ 6a_3 z + 12a_4 z^2 + \ldots + w\frac{\partial^2\sigma(z,w)}{\partial z^2} \\ \frac{\partial\sigma(z,w)}{\partial z} + w\frac{\partial^2\sigma(z,w)}{\partial w \partial z} \\ 2\frac{\partial\sigma(z,w)}{\partial w} + w\frac{\partial^2\sigma(z,w)}{\partial w^2} \end{pmatrix}$$

e nel punto $y = (0, 0)$ si ha

$$j_{2,y}(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma(z, w) \\ 0 \\ \frac{\partial\sigma(z,w)}{\partial z} \\ 2\frac{\partial\sigma(z,w)}{\partial w} \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che
$$\dim \mid L - y \mid = \dim \mid L \mid -1$$
perché L è molto ampio e quindi spanned. Sia ora τ_y il vettore tangente a C_b in y e denotiamo con $\mid L - y - \tau_y \mid$ il sottospazio delle sezioni nulle in y e il cui luogo degli zeri ha τ_y come tangente in y. Poiché $\mid L \mid$ è molto ampio, allora, si ha
$$\dim \mid L - y - \tau_y \mid = \dim \mid L \mid -2.$$
Ne consegue, dunque, che una base di $H^0(L)$ può essere costituita da sezioni $s_0, \ldots, s_5$ tali che
$$s_0 \in \mid L \mid \setminus \mid L - y \mid,$$
$$s_1 \in \mid L - y \mid \setminus \mid L - y - \tau_y \mid,$$
$$s_2, \ldots, s_5 \in \mid L - y - \tau_y \mid .$$
In particolare possiamo scegliere, in un intorno di y, $s_0 = 1$, $s_1 = z$ e per $i = 2, \ldots, 5$
$$s_i = a_{3i}z^3 + a_{4i}z^4 + \ldots + w\sigma_i(z,w),$$
con σ_i funzioni olomorfe. La matrice che rappresenta $j_{2,y}$, allora, è del tipo
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2(z,w) & \cdots & \cdots & \sigma_5(z,w) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \sigma_2(z,w)}{\partial z} & \cdots & \cdots & \frac{\partial \sigma_5(z,w)}{\partial z} \\ 0 & 0 & 2\frac{\partial \sigma_2(z,w)}{\partial w} & \cdots & \cdots & 2\frac{\partial \sigma_5(z,w)}{\partial w} \end{bmatrix}.$$
Si verifica, quindi, che il rango di tale matrice è ≤ 5 e quindi lo spazio osculatore a S nel punto y ha dimensione minore o uguale a 4.

Introduciamo a questo punto un'osservazione relativa a superfici genericamente 2-regolari, dove si utilizza un metodo analogo a quello usato nella precedente analisi dei punti di iperosculazione di S [LM3].

Definizione 3.5.2 *Sia $C \subset \mathbf{P}^N$ una curva irriducibile. Siano $\mathcal{L} = (L)_C$ il fibrato lineare iperpiano ristretto alla curva C e $H^0(\mathcal{L})$ il relativo sistema lineare completo. Diciamo che un punto $x \in C$ è un* punto di iperosculazione di indice *h se*
$$\mid \mathcal{L} - hx \mid = \mid \mathcal{L} - (h+1)x \mid .$$

Proposizione 3.5.3 *Supponiamo che $\mid L \mid$ sia un sistema molto ampio su S, L sia 2-regolare nel punto $x \in S$ e C sia una curva irriducibile e liscia in x. Allora C non può ammettere in x un punto di iperosculazione di indice $h \leq 2$.*

Dimostrazione: Supponiamo, per assurdo, che C abbia un punto di iperosculazione di indice $h \leq 2$ in x. Poiché $\mid L \mid$ è molto ampio è impossibile che h sia 0 o 1, quindi dovremmo studiare solo il caso $h = 2$. Poiché C è liscia in x, possiamo scegliere coordinate locali (z, w) su S centrate in x in modo che C sia definita localmente dall'equazione $w = 0$ e z sia la coordinata locale su C. Consideriamo una sezione $s \in H^0(L)$ e sia s_C la sua restrizione alla curva C. Poiché x è un punto di iperosculazione di indice 2 per C, nell'immersione data da $\mid L \mid$, lo sviluppo locale di s_C in x è della forma

$$s_C = a_0 + a_1 z + a_3 z^3 + \ldots .$$

Dato che la curva C è definita dall'annullarsi della coordinata w, avremo

$$s = a_0 + a_1 z + a_3 z^3 + \ldots + w\sigma(z, w),$$

dove σ è una funzione olomorfa in un intorno di x in S. Calcolando, ora, il 2-getto $j_{2,x}(s)$ vediamo che il termine

$$\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = 6a_3 z + 12a_4 z^2 + \ldots + w\frac{\partial^2 \sigma(z, w)}{\partial z^2}$$

è nullo in x. Poiché ciò vale per ogni sezione $s \in H^0(\mathcal{L})$, possiamo concludere che l'omomorfismo

$$j_{2,x} : H^0(L) \to (J_2 L)_x$$

non è suriettivo, ma ciò contraddice l'ipotesi che L sia 2-regolare in x. □

E' ovvio, allora, che se (S, L) è 2-regolare sull'aperto denso $\mathcal{U} \subseteq S$, ogni curva liscia C in S non ammette punti di iperosculazione di indice ≤ 2 in $\mathcal{U}$.

Bibliografia

[B] A. Beauville, *Complex Algebraic Surfaces.* London Math. Soc. Student Texts, vol. **34**. Cambridge University Press, 1996.

[BPT] E. Ballico, R. Piene, H. Tai, *A characterization of balanced rational normal surface scrolls in terms of their osculating space II.* Math. Scand., **70** (1992), 204–206.

[BS] M. C. Beltrametti, A. J. Sommese, *The Adjunction Theory of Complex Projective Varieties.* Expositions in Math., vol. **16**. De Gruyter, Berlin-New York, 1995.

[Ha1] R. Hartshorne, *Equivalence relations on algebraic cycles and subvarieties of small codimension.* Algebraic Geometry. Arcata 1974. Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math., vol. **29** (1975), pp.129–164.

[Ha2] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1977.

[IT] P. Ionescu, M. Toma, *On very ample vector bundles on curves.* Intern. J. Math., **8** (1997), 633–643.

[L] A. Lanteri, *On the osculatory behavior of surface scrolls.* In preparazione.

[LM1] A. Lanteri, R. Mallavibarrena, *Higher order dual varieties of projective surfaces.* Comm. Algebra, **27** (1999), 4827–4851.

[LM2] A. Lanteri, R. Mallavibarrena, *Osculatory behavior and second dual varieties of Del Pezzo surfaces.* Adv. in Geometry, in stampa.

[LM3] A. Lanteri, R. Mallavibarrena, *Jets of plurianticanonical bundles on Del Pezzo surfaces of degree ≤ 2.* In preparazione.

[M] H. Maeda, *Surfaces with nef anticanonical bundles.* Boll. Un. Mat. Ital. (7) **8–A** (1994), 425–430.

[MP] R. Mallavibarrena, R. Piene, *Duality for elliptic normal surface scrolls.* Enumerative Algebraic Geometry (S. L. Kleiman and Anders Thorup, eds.), Contemporary Mathematics, vol. 123, Amer. Math. Soc., 1991, pp. 149–160. Comm. Algebra, **27** (1999), 27–45.

[N] M. Nagata, *On self-intersection number of a section on a ruled surface.* Nagoya Math. J., **37** (1970), 191–196.

[O] G. Ottaviani, *Varietà Proiettive di Codimensione Piccola.* Notes of INDAM course, Aracne, Roma 1995.

[P] R. Piene, *A note on higher order dual varieties, with an application to scrolls.* Proc. Symp. Pure Math. **40** (1983), Part 2, 335–452.

[PT] R. Piene, H. Tai, *A characterization of balanced rational normal scrolls in terms of their osculating space.* Enumerative Geometry, Proc Sitges 1987, S. Xambò-Descamps (ed.). Lectures Notes in Math., vol. **1436**, Springer-Verlag, 1990, pp. 215–224.

[R] I. Reider, *Vector bundles of rank* 2 *and linear system on algebraic surfaces.* Ann. of Math., **127** (1988), 309–316.

[S] T. Shifrin, *The osculatory behavior of surfaces in* $\mathbf{P}^5$. Pacif. J. Math., **123** (1986), 227–256.

[So] A. J. Sommese, *Hyperplane sections of projective surfaces I. The adjunction mapping.* Duke Math. J., **46** (1979), 377–401.

[SS] B. Shiffman, A. J. Sommese, *Vanishing Theorems on Complex Manifolds.* Birkhauser, Boston-Basel-Stuttgart, 1985.

[SV] A. J. Sommese, A. Van de Ven, *On the adjunction mapping.* Math. Ann., **278** (1987), 593–603.

[T] E. Togliatti, *Alcuni esempi di superfici algebriche degli iperspazi che rappresentano un'equazione di Laplace.* Comm. Math. Helv., **1** (1929), 255–272.

[V] A. Van de Ven, *On the* 2*-connectedness of very ample divisors on a surface.* Duke Math. J., **46** (1979), 403–407.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare il mio relatore, Prof. Antonio Lanteri, per la sua costante disponibilità, per la competenza e l'entusiasmo con cui mi ha guidato durante il lavoro di tesi, per la fiducia e l'incoraggiamento che mi ha dimostrato in diverse occasioni e per tutto ciò che mi ha insegnato.

Vorrei esprimere, inoltre, la mia riconoscenza verso tutti gli insegnanti che hanno saputo comunicarmi la passione per la matematica e che mi hanno sempre incoraggiata e valorizzata, aiutandomi a vivere l'esperienza universitaria in modo costruttivo e sereno.

Ringrazio anche la mia famiglia e tutti i miei amici per il loro sostegno e la loro presenza insostituibile.