Corso di Geometria. Ingegneria Meccanica.
PRIMA SCHEDA DI ESERCIZI.

(1) Siano dati due vettori non paralleli u e v e $w = 2u - v$. I tre vettori
$$u + 3w, v - u, w + 2v$$
sono linearmente dipendenti (cioè complanari)? Se sì, scrivere il primo come combinazione lineare degli altri due.

(2) Dati tre vettori linearmente indipendenti (cioè non complanari) u, v, w, dire se i vettori
$$u - v, 2u + 3w, u + v + 3w$$
sono linearmente dipendenti. Se sì, scrivere il primo come combinazione lineare degli altri due.

(3) Siano A, B due punti del piano e O l'origine. Verificare che il punto medio M del segmento AB è tale che
$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

(4) Siano A, B, C, D i vertici di un quadrilatero nel piano. Verificare che i loro punti medi sono vertici di un parallelogramma.

(5) Siano u, v, w non complanari. Cosa si può dire di un vettore che è contemporaneamente complanare con u e v e con v e w?

(6) Sia $\{r, s, t\}$ una base di $\mathcal{V}^3$ (l'insieme dei vettori dello spazio). Dati i vettori
$$u = 2r + t, \quad v = -r + t, \quad w = r + s,$$
provare che $\{u, v, w\}$ è una base di $\mathcal{V}^3$.

(7) Sia $\{r, s, t\}$ una base di $\mathcal{V}^3$ e consideriamo i vettori
$$u = r - \alpha s + 3t, \quad v = r - s - t, \quad w = 2r - t.$$
Trovare il valore di α per il quale u è complanare con v e w.

(8) Sia $\{r, s, t\}$ una base di $\mathcal{V}^3$ e consideriamo i vettori
$$u = r - s - \alpha t, \quad v = r - t, \quad w = s - t.$$
Trovare i valori di α per i quali u, v, w formano una base.

(9) Siano u, v due vettori paralleli e $\{u, w, t\}$ una base di $\mathcal{V}^3$.
L'insieme $\{u, v, w, t\}$ è una base di $\mathcal{V}^3$? È un sistema di generatori per $\mathcal{V}^3$?
L'insieme $\{v, w, t\}$ è una base di $\mathcal{V}^3$? È un sistema di generatori per $\mathcal{V}^3$?
L'insieme $\{v, u, t\}$ è una base di $\mathcal{V}^3$? È un sistema di generatori per $\mathcal{V}^3$?

(10) Date le due matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, calcolare

$$A + 2B, 2A - 3B, A({}^tB), AB, BA$$

e provare che A e B sono linearmente indipendenti.

(11) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 1/2 \\ 2 & -\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

dire se esiste α per cui A, B, C sono linearmente dipendenti.

(12) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & \sqrt{2} & -1 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1 \\ -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

calcolare AB e BA.

(13) Dimostrare che le matrici antisimmetriche reali di ordine 3 sono un sottospazio vettoriale di $M(3, \mathbb{R})$.

(14) Provare che

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $M(2, \mathbb{R})$.