Corso di Geometria. Ingegneria Meccanica.
SECONDA SCHEDA DI ESERCIZI.

In tutti gli esercizi che seguono $\{i, j, k\}$ è una base ortonormale.

(1) Dati i vettori $u = 3i - 7j$, $v = -2i + 9j - k$,$w = i + j - 13k$, calcolare $u \cdot v$, $u \cdot w$, $w \cdot v$, $u \wedge v$, $u \wedge w$, $w \wedge v$, $u \wedge v \cdot w$.

(2) Dati u, v, w come nell'esercizio (1), dire quali dei seguenti insiemi è una base: $\{u, v, w\}$, $\{u \wedge v, v, w\}$, $\{u, v, u + 3v\}$.

(3) Dire se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti:

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

(4) Siano x e y come nell'esercizio precedente. Calcolare $x \cdot y$ e $x \wedge y$. Dato il vettore $z = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 3 \end{pmatrix}$ calcolare $z \wedge x$ e $z \wedge y \cdot x$.

(5) L'insieme di vettori:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $\mathbb{R}^3$?

(6) Verificare che il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

non è un sottospazio vettoriale.

(7) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + 2y - z = 0 \right\}$$

è un sottospazio vettoriale? Se sì, trovarne un insieme di generatori e la dimensione.

(8) Estrarre tutte le possibili basi di $\mathbb{R}^2$ dall'insieme

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \right\}$$

(9) Verificare che

$$< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} > = < \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} >$$

(10) Determinare i vettori complanari ai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, ortogonali al vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e aventi norma $2\sqrt{6}$.

(11) Se (v, w, t) è una base positivamente orientata, che cosa si può dire della base $(v, v + w, t)$?

(12) Siano v e w tali che $v \wedge w \cdot t = 0$ per ogni vettore t . Che cosa si può dire di v e w?

(13) Siano v e w non paralleli. Descrivere i vettori x che risolvono il sistema

$$\begin{cases} x \wedge v \cdot w = 0 \\ x \cdot v = 0 \end{cases}$$

(14) Siano v e w ortogonali, $w \neq 0$. Trovare le soluzioni dell'equazione

$$x + (v \cdot x)w + w = 0.$$

(15) Sia A è una matrice antisimmetrica di ordine 3. Calcolare $\mathrm{tr}(A)$. Trovare una base del sottospazio delle matrici antisimmetriche di ordine 3 e calcolarne la dimensione.

(16) Calcolare il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -3\sqrt{2} & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

(17) Calcolare il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & -5 \\ 2 & 0 & -1 \\ 5 & -45 & -25 \end{pmatrix}.$$

Che cosa possiamo dedurre sui vettori colonna e sui vettori riga? Se possibile scrivere una relazione tra i vettori colonna e una relazione tra i vettori riga.

(18) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

calcolare $\mathrm{tr}(A + B)$ e $\det(AB)$.

(19) Trovare una formula per calcolare il determinante di una matrice triangolare superiore di ordine 4.

(20) Siano A e B due matrici quadrate di ordine 3, con $\mathrm{tr}(A) = 0$, $A \neq 0$ e $\mathrm{tr}(B) \neq 0$. Dimostrare che A e B sono linearmente indipendenti. (Suggerimento: usare le proprietà della traccia.)

(21) Calcolare il determinante della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$. Dire per quali valori di α i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ sono una base di $\mathbb{R}^2$?