Corso di Geometria. Ingegneria Meccanica.
TERZA SCHEDA DI ESERCIZI.

(1) Sapendo che $|u \wedge v| = \sqrt{24}$, $|u| = 2\sqrt{2}$, $|v| = 2$ e $u \cdot v = -2\sqrt{2}$, calcolare il valore dell'angolo convesso compreso tra u e v.

(2) Sapendo che $|u + 2v| = 7$, $|u| = 5$, $|v| = 2$, calcolare il valore del coseno dell'angolo compreso tra u e v.

(3) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ i vettori

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

sono una base di $\mathbb{R}^3$?

(4) Calcolare la dimensione dello spazio

$$< \begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ a-2 \\ 2a \end{pmatrix} >$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.

(5) Calcolare la dimensione e una base dello spazio

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

(6) Dato un vettore $v_0 \neq 0$ di $\mathcal{V}^3$, dimostrare che il sottoinsieme

$$W = \{v \in \mathcal{V}^3 | v \wedge v_0 = 0\}$$

e' un sottospazio di $\mathcal{V}^3$ e calcolarne la dimensione e una base.

(7) Verificare che il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : (x-1)^2 + y^2 = 1 \right\}$$

non è un sottospazio vettoriale.

(8) Trovare una base e la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : x - y - z = 0, 2x + 3t = 0 \right\}$$

(9) Calcolare il rango della matrice A al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & \alpha \\ \sqrt{2} & \alpha & \alpha\sqrt{2} \\ \alpha & \alpha\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

(10) Calcolare il rango della matrice A al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha+3 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha-3 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(11) Applicando il teorema di Rouche'-Capelli dire quante sono le soluzioni del sistema:
$$\begin{cases} 3x+2y-z=2 \\ x+3y+2z=1 \\ 2x-y-3z=1 \end{cases}$$

(12) Applicando il teorema di Rouche'-Capelli dire quante sono le soluzioni del sistema:
$$\begin{cases} x+y-3z=0 \\ 2x-y=1 \\ 2y-z=0 \end{cases}$$

(13) Applicando il teorema di Rouche'-Capelli dire quante sono le soluzioni del sistema:
$$\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x+y=0 \\ x-3y=2 \end{cases}$$