Corso di Geometria. Ingegneria Meccanica.
QUINTA SCHEDA DI ESERCIZI.

(1) Trovare equazioni cartesiane e parametriche dell'asse r del fascio di piani

$$\Pi_{(\lambda,\mu)}:\ (\lambda+2\mu)x+\mu y-5\lambda z+\lambda+\mu=0.$$

Trovare la distanza tra r e $s: x=1, y=1+\lambda, z=-\lambda+1$.

(2) Verificare che le rette

$$r:\ \begin{cases} x-2y=1 \\ y-z+1=0 \end{cases} \qquad s:\ \begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y+z+1=0 \end{cases}$$

sono sghembe e calcolare la distanza $d(r,s)$. Trovare inoltre due piani Π_1 e Π_2 paralleli tra loro e tali che $r\subseteq\Pi_1$ e $s\subseteq\Pi_2$.

(3) Determinare la posizione reciproca delle rette

$$r:\ \begin{cases} 2y-z=0 \\ x+3y=0 \end{cases} \qquad s:\ \begin{cases} x=3t-1 \\ y=1-t \\ z=-2t+1 \end{cases}$$

e trovarne la distanza.

(4) Determinare la retta di $\mathbb{R}^2$ passante per $P=(1,2)$ e che forma con l'asse delle x un angolo di $\pi/6$.

(5) Calcolare la distanza tra il piano $\Pi: x+y+z=0$ e la retta $s:\ \begin{cases} x+y=2 \\ z-3=0 \end{cases}$. Scrivere l'equazione della retta parallela a s e contenuta nel piano Π.

(6) Quali tra le seguenti applicazioni sono lineari?

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y-x^2 \\ 2y+z-x \end{pmatrix};$$

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x-y+7z \\ 2y+z-x \\ x \end{pmatrix};$$

$$h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x-y+7z \\ x+1 \end{pmatrix}.$$

(7) Data l'applicazione $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+y-w \\ 2y+11z-x \end{pmatrix},$$

verificare che e' lineare. Scrivere la matrice associata a f rispetto alle basi canoniche. Descrivere i sottospazi $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$ (trovarne la dimensione e una base).

(8) Data l'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x - z \end{pmatrix},$$
verificare che e' lineare. Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base canonica. Descrivere i sottospazi vettoriali $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$ (trovarne la dimensione e una base). Scriverne le equazioni cartesiane e parametriche e trovarne la posizione reciproca.

(9) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare definita da:
$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}; f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Determinare la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche.

(10) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ l'applicazione associata, rispetto alle basi canoniche, alla matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Descrivere nucleo e immagine di f.

(11) Sia $f : M(2, \mathbb{R}) \to M(3, \mathbb{R})$ definita da
$$f\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & z-w & x \\ 0 & kx & z+w+y \\ 2y & z+k & -2w \end{pmatrix},$$
al variare di $k \in \mathbb{R}$. Trovare i valori di k per cui f e' lineare. Per tali valori scrivere la matrice A che rappresenta f rispetto alle basi canoniche e descrivere immagine e nucleo di f. (*Suggerimento: si deve ottenere una matrice A di dimensione* 9×4)