Domanda n.1) Date le rette $r: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases}$ ed $s: \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases}$, sia Π un piano parallelo alle rette r ed s e distante 1 da r. Allora

R.1) Π e' parallelo al piano $2 - x - 3y - 7z = 0$
R.2) esiste un unico piano Π
R.3) nessuna delle altre risposte
R.4) non e' possibile calcolare l'equazione del piano Π
R.5) Π e' ortogonale al piano $2 - x - 3y - 7z = 0$

Domanda n.2) Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e sia M la matrice inversa di AB. Allora

R.1) $m_{11} + m_{12} + m_{21} = 2$
R.2) nessuna delle altre risposte
R.3) la traccia di M e' $\frac{2}{5}$
R.4) $m_{12} + m_{23} + m_{31} = \frac{2}{5}$
R.5) il determinante di M e' 0

Domanda n.3) Sia S l'insieme delle soluzioni del sistema $\begin{pmatrix} b & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ al variare dei parametri $a, b \in \mathbf{R}$. Allora

R.1) se $a = 0, b = -1$ allora la dimensione di S e' 2,
R.2) se $a = 1$ e $b = -1$ allora S e' vuoto
R.3) nessuna delle altre risposte
R.4) la dimensione di S e' 1 per ogni valore di a e b
R.5) S e' sempre uno spazio affine ma non vettoriale

Domanda n.4) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 2 & k & k \\ k-1 & 0 & k-1 \end{pmatrix}$ al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$. Allora

R.1) A e' diagonalizzabile per infiniti valori di k, ma non per tutti
R.2) se A e' diagonalizzabile allora $k > 0$
R.3) se $k = 0$ allora l'autovalore 0 ha molteplicita' algebrica 3
R.4) A e' diagonalizzabile per ogni $k \neq 0$
R.5) nessuna delle altre risposte

Domanda n.5) Dati la base ortonormale $\{i, j, k\}$ di $\mathcal{V}^3$ e i vettori $u = i + 2j + 3k$, $v = j - 2k$, $w = 3i + j - k$. Allora l'espressione $(w \wedge v) \cdot (u \wedge 2v)$

R.1) nessuna delle altre risposte
R.2) e' un vettore
R.3) e' una base
R.4) e' zero
R.5) e' uno scalare positivo

Domanda n.6) Sia v_0 un vettore non nullo di $\mathcal{V}^3$ e U l'insieme definito come $U = \{x \in \mathcal{V}^3 : (x \wedge v_0) \wedge v_0 = 0\}$. Allora

R.1) $U = \{0\}$
R.2) U e' l'insieme vuoto
R.3) U e' un piano
R.4) U e' un sottospazio vettoriale di dimensione 1
R.5) nessuna delle altre risposte

Domanda n.7) Sia Π il piano contenente la retta r di equazione $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -t + 2 \\ z = t + 1 \end{cases}$ e ortogonale al piano $x + 2y - z = 11$ e sia s la retta di equazione $\begin{cases} x + y = 2 \\ 4y + 5z = 4 \end{cases}$ Allora

R.1) Π e s sono paralleli e hanno distanza 0
R.2) Π e s sono ortogonali e hanno distanza 0
R.3) Π e s sono paralleli e hanno distanza $\frac{2\sqrt{35}}{7}$
R.4) nessuna delle altre risposte
R.5) Π e s sono paralleli e hanno distanza $\frac{7\sqrt{5}}{2}$

Domanda n.8) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare definita come $f(x, y, z) = (z, 2x - y, y + z, 3y)$ e sia $V = \mathrm{Im}(f)$. Allora

R.1) f e' suriettiva
R.2) V contiene al massimo due vettori linearmente indipendenti
R.3) nessuna delle altre risposte
R.4) V ammette $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$ come base
R.5) V contiene il vettore $(1/2, -11, 7/6, 2)$

Domanda n.9) Al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$ siano dati i tre piani $\Pi_1 : x + ky + z = -k + 2$, $\Pi_2 : x - y = 1 + k^2$ e $\Pi_3 : y - z = -k$. Allora

R.1) se $k = 0$ i tre piani sono paralleli
R.2) nessuna delle altre risposte
R.3) i tre piani sono paralleli se e solo se $k = -2$
R.4) i tre piani hanno un solo punto in comune per ogni valore di k
R.5) i tre piani hanno una retta in comune per due valori distinti di k

Domanda n.10) Sia Π_1 il piano passante per il punto $P = (0, -2, 2)$ e contenente la retta di equazione $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$. Sia Π_2 il piano passante per il punto $R = (12, 0, 10)$ e ortogonale alla retta passante per R e $Q = (6, 4, 6)$. Sia α l'angolo acuto formato da Π_1 e Π_2. Allora

R.1) $\tan\alpha = \frac{\sqrt{11}}{9\sqrt{17}}$
R.2) $\tan\alpha = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{17}}$
R.3) nessuna delle altre risposte
R.4) $\tan\alpha = \frac{\sqrt{106}}{9}$
R.5) $\tan\alpha = \frac{53}{9}$

Domanda n.11) Sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$ e $f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ lineare tale che $v_1 = e_1 + e_2$ e' autovettore relativo all'autovalore 1, $v_2 = 2e_2 - e_3$ appartiene al nucleo di f, $f(e_1 - e_2 + 5e_3) = e_1 + e_2 + e_3$. Allora

R.1) il vettore $(2, 2, 4)$ e' autovettore relativo all'autovalore 1
R.2) f e' biunivoca
R.3) $f(-4, 4, 4) = (0, 0, 4)$
R.4) nessuna delle altre risposte
R.5) $f(1, 1, 1) = (1, 1, 1/4)$

Domanda n.12) Sia Q la quadrica di equazione $x^2 + 2kxy + y^2 + 2xz - 2y - 2z - 2 = 0$, al variare di $k \in \mathbf{R}$. Allora

R.1) per ogni valore di k, Q e' un iperboloide iperbolico
R.2) esistono esattamente due valori di k per cui Q e' un ellissoide complesso
R.3) nessuna delle altre risposte
R.4) se $k = 0$, Q e' un ellissoide reale
R.5) se $k = 0$, Q e' un iperboloide ellittico

Domanda n.13) Sia C la conica di equazione: $x^2 + y^2 + (k-1)xy + x = 0$, al variare di $k \in \mathbf{R}$. Allora

R.1) esistono due valori di k per cui C e' degenere
R.2) C non e' mai un'iperbole
R.3) nessuna delle altre risposte
R.4) C e' una parabola per infiniti valori di k
R.5) esistono due valori di k per cui C e' una parabola

Risposte	1	4	2	1	5	4	3	5	2	4	5	1	5
Domande	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Domanda n.14) Discutere al variare del parametro h il sistema lineare:

$$\begin{cases} x + 3y - 2h^2 z + t = h^2 - 1 \\ hx + hy - h^2 z + 2t = 2h^2 + 1 \\ 3x + 5y + (h^2+1)z + 3t = h + 2 \end{cases}$$

Domanda n.15) Discutere al variare del parametro h il sistema lineare:

$$\begin{cases} x + hy + z = h + 2 \\ 3x + (h-1)y + 2z = 2h^2 + 3 \\ 4x + 5y + 3z = 6h \end{cases}$$

Domanda n.16) Tra tutti i piani paralleli alla retta $r : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4 \\ z = 3t \end{cases}$ e ortogonali al piano $x + y - 2z + 7 = 0$, trovare (se esistono) tutti quelli distanti 1 da r. Quanti sono?

Domanda n.17) Sia r una retta parallela al piano $x - z = 1$, che passa per $A = (1, 2, 3)$ e forma un angolo di $\pi/3$ con la retta $l : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$ (Soluzione: $r : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases}$)