Corso di Geometria. Ingegneria Meccanica.

Equazione della conica generica:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

Matrice dei coefficienti della conica:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Matrice della parte di secondo grado:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Forme canoniche delle coniche:

(1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ellisse reale
(2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ $\emptyset$ (ellisse immaginaria)
(3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ iperbole
(4) $x^2 - ay = 0$ parabola
(5) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ coppia di rette incidenti
(6) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ punto (coppia di rette complesse incidenti)
(7) $\frac{x^2}{a^2} - 1 = 0$ rette parallele
(8) $\frac{x^2}{a^2} + 1 = 0$ $\emptyset$ (rette complesse parallele)
(9) $x^2 = 0$ una sola retta

Invarianti delle coniche:

(1) $\det A \neq 0$ $\det B > 0$ $\det A < 0$
(2) $\det A \neq 0$ $\det B > 0$ $\det A > 0$
(3) $\det A \neq 0$ $\det B < 0$
(4) $\det A \neq 0$ $\det B = 0$
(5) $\det A = 0$ $\det B < 0$
(6) $\det A = 0$ $\det B > 0$
(7) $\det A = 0$ $\det B = 0$
(8) $\det A = 0$ $\det B = 0$
(9) $\det A = 0$ $\det B = 0$

Schema della riduzione in forma canonica di una conica di equazione:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

Primo passo: ROTAZIONE
Per il teorema spettrale possiamo diagonalizzare la matrice B trovando gli autovalori λ_1 e λ_2 e una base ortonormale di autovettori $\{v_1, v_2\}$. Sia in particolare $v_1 = (\alpha, \beta)$ e $v_2 = (\beta, -\alpha)$. Applichiamo la rotazione:

$$\begin{cases} x = \alpha x' + \beta y' \\ y = \beta x' - \alpha y' \end{cases}$$

Si ottiene l'equazione:

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + 2ax' + 2by' + a_{33} = 0.$$

Secondo passo: TRASLAZIONE
Primo caso: se uno degli autovalori e' 0 (supponiamo sia $\lambda_2 = 0$). Operiamo la traslazione:

$$\begin{cases} x' = x'' - \frac{a}{\lambda_1} \\ y' = y'' \end{cases}$$

Si ottiene l'equazione:

$$\lambda_1(x'')^2 + 2by'' + c = 0.$$

Se $b = 0$ si ottiene una delle forme (7), (8), (9) a seconda del segno di c.
Se $b \neq 0$ operiamo un'altra traslazione:

$$\begin{cases} x'' = x''' \\ y'' = y'' - \frac{c}{2b} \end{cases}$$

e otteniamo

$$\lambda_1(x''')^2 + 2by''' = 0,$$

e quindi la forma canonica (4).
Secondo caso: se entrambi gli autovalori sono diversi da 0. Applichiamo la traslazione:

$$\begin{cases} x' = x'' - \frac{a}{\lambda_1} \\ y' = y'' - \frac{b}{\lambda_2} \end{cases}$$

e otteniamo

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + c = 0.$$

A seconda del valore dei coefficienti si trovano le forme canoniche (1), (2), (3), (5) o (6).