

## Corso di Geometria. Ingegneria Meccanica.

Equazione di una superficie quadrica di  $\mathbb{R}^3$ :

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + 2a_{23}yz + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

Matrice dei coefficienti della quadrica:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Matrice della parte di secondo grado:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Forme canoniche delle quadriche:

- (1)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$  ellissoide reale
- (2)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$   $\emptyset$  (ellissoide complesso)
- (3)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$  iperboloide ellittico (a 2 falde)
- (4)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$  iperboloide iperbolico (a 1 falda)
- (5)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = 0$  paraboloido ellittico (a 1 falda)
- (6)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = 0$  paraboloido iperbolico (a sella)
- (7)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$  punto (cono complesso)
- (8)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$  cono reale
- (9)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$   $\emptyset$  (cilindro complesso)
- (10)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$  cilindro ellittico
- (11)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$  cilindro ellittico
- (12)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y}{b} = 0$  cilindro parabolico
- (13)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$  punto (piani complessi incidenti)
- (14)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$  piani incidenti
- (15)  $\frac{x^2}{a^2} + 1 = 0$   $\emptyset$  (piani complessi paralleli)
- (16)  $\frac{x^2}{a^2} - 1 = 0$  piani paralleli
- (17)  $x^2 = 0$  un piano (due piani coincidenti)

**Classificazione delle quadriche:**

**Invarianti:**  $\det A$  (determinante di  $A$ ),  $\text{rk}A$  (rango di  $A$ ),  $\det B$  (determinante di  $B$ ),  $\text{rk}B$  (rango di  $B$ ), segno degli autovalori di  $A$  e di  $B$ .

**Schema:**

- (1)  $\det A \neq 0$ 
  - (a)  $\det B \neq 0$ 
    - (i)  $\det A < 0$ 
      - autovalori di  $B$  concordi  $\longrightarrow$  **ellissoide reale**
      - autovalori di  $B$  non concordi  $\longrightarrow$  **iperboloide ellittico**
    - (ii)  $\det A > 0$ 
      - autovalori di  $B$  concordi  $\longrightarrow$  **ellissoide complesso**
      - autovalori di  $B$  non concordi  $\longrightarrow$  **iperboloide iperbolico**
  - (b)  $\det B = 0$ 
    - (i)  $\det A < 0 \longrightarrow$  **paraboloide ellittico**
    - (ii)  $\det A > 0 \longrightarrow$  **paraboloide iperbolico**
- (2)  $\text{rk}A = 3$ 
  - (a)  $\det B = 0 \longrightarrow$  **cilindro**
  - (b)  $\det B \neq 0 \longrightarrow$  **cono**
- (3)  $\text{rk}A = 2 \longrightarrow$  **piani distinti**
- (4)  $\text{rk}A = 1 \longrightarrow$  **piani coincidenti**