Soluzioni esempio compito 3 crediti

(1) La risposta corretta e' 2. Infatti f va da uno spazio di dimensione 9 a uno di dimensione 8 e il teorema della dimensione dice che
$$\dim\ \text{Ker}\ (f) + \dim\ \text{Im}\ (f) = 9.$$
D'altra parte sappiamo che $\dim\ \text{Im}\ (f) \leq \min(8,9) = 8$ e quindi $\dim\ \text{Ker}\ (f) \geq 1$.

(2) La risposta corretta e' 4. Applicare la definizione di prodotto scalare e vettoriale.

(3) La risposta corretta e' 5. Fare i calcoli e sommare i tre elementi della prima riga.

(4) La risposta corretta e' 4. Il piano Π ha equazione $x = 0$. (per calcolarlo si puo' considerare il fascio di piani per la retta data, dopo averne portato l'equazione in forma cartesiana, e poi imporre il passaggio per l'origine).
Quindi il normale $n_\Pi = (1,0,0)$, mentre il vettore direttore della retta r e' $v_r = (0,1,-1)$. Siccome $v_r \cdot n_\Pi = 0$ si ha che la retta e il piano sono paralleli.
Inoltre si vede che la risposta 1 e' falsa calcolando l'equazione parametrica di r:
$$x = 4, y = -3 - t, z = t$$
che non verifica mai l'equazione del piano $x = 0$.

(5) La risposta corretta e' 1. Infatti $(k,0,1,1)$ appartiene all'immagine di f se e solo se il sistema non omogeneo corrispondente ammette soluzione, cioe' se e solo se le matrici
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & k & 3 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & k \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & k & 3 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
hanno lo stesso rango e questo succede esattamente se
$$k = 1, -1.$$

(6) La risposta corretta e' 1. Il sottospazio $W = \{(1,2,3)\}^\perp$ e' dato dai vettori ortogonali a $(1,2,3)$. In particolare e' un piano e ha dimensione 2. Per sapere quando $\mathcal{B}$ e' una base basta verificare se i suoi elementi appartengono a W cioe' se $(k,0,1)\cdot(1,2,3) = 0$ e $(0,k,2)\cdot(1,2,3) = 0$. Questo succede solo se $k = -3$.

(7) La risposta corretta e' 2. Le due rette sono sghembe. Calcoliamo $v_r = (0,0,2)$ e $v_s = (1,-1,0)$ e applichiamo la formula della distanza tra rette sghembe.

(8) La risposta corretta e' 2. Calcoliamo l'equazione di Π_1: $x + y + 3z - 7 = 0$, quindi il normale e' $n_1 = (1, 1, 3)$. La retta per P e Q ha vettore direttore $(0, 1, 3)$, quindi il normale di un piano ortogonale a questa retta e' $n_2 = (0, 1, 3)$. Applicando le formule del prodotto scalare e vettoriale troviamo:

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{||n_1 \wedge n_2||}{||n_1|| \cdot ||n_2||} + \frac{n_1 \cdot n_2}{||n_1|| \cdot ||n_2||} = \frac{4 + \sqrt{6}}{\sqrt{2}2}$$

(9) La risposta corretta e' 4. Calcoliamo la matrice che rappresenta f rispetto alle basi canoniche e troviamo

$$\begin{pmatrix} 12/5 & -12/5 & -2/5 \\ 1/5 & -1/5 & -1/5 \\ 12/5 & -12/5 & -2/5 \end{pmatrix}$$

che e' diagonalizzabile perche' ha come autovalori $2, 0, -1/5$, quindi 2 e' falsa. Si vede facilmente che anche le altre risposte sono false.

(10) La risposta corretta e' 5. Gli autovalori sono $0, -2, k - 2$. Se $k \neq 0, 2$, B e' diagonalizzabile. I casi $k = 0$ e $k = 2$ si devono studiare a parte e si vede che in entrambi i casi la matrice non e' diagonalizzabile.

(11) La risposta corretta e' 4. La matrice dei coefficienti del sistema ha rango 3 se $k \neq 0$ e 2 se $k = 0$. Quindi la dimensione dello spazio delle soluzioni e' $4 - \mathrm{rg}(A) = 1$ o 2.