Soluzioni esempio compito 6 crediti

(1) La risposta corretta e' 3. Gli autovalori sono $0, -2, k-2$. Se $k \neq 0, 2$, B e' diagonalizzabile. I casi $k = 0$ e $k = 2$ si devono studiare a parte e si vede che in entrambi i casi la matrice non e diagonalizzabile.

(2) La risposta corretta e' 2. Calcoliamo l'equazione di Π_1: $x + y + 3z - 7 = 0$, quindi il normale e' $n_1 = (1, 1, 3)$. La retta per P e Q ha vettore direttore $(0, 1, 3)$, quindi il normale di un piano ortogonale a questa retta e' $n_2 = (0, 1, 3)$. Applicando le formule del prodotto scalare e vettoriale troviamo:

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{||n_1 \wedge n_2||}{||n_1|| \cdot ||n_2||} + \frac{n_1 \cdot n_2}{||n_1|| \cdot ||n_2||} = \frac{1 + \sqrt{10}}{\sqrt{11}}$$

(3) La risposta corretta e' 3. La matrice dei coefficienti del sistema ha rango 3 se $k \neq 2$ e 1 se $k = 2$. Quindi la dimensione dello spazio delle soluzioni e' $4 - \mathrm{rg}(A) = 3$ se e solo se $k = 2$.

(4) La risposta corretta e' 2. Le due rette sono sghembe. Calcoliamo $v_r = (0, 1, 2)$ e $v_s = (1, -1, 0)$ e applichiamo la formula della distanza tra rette sghembe.

(5) La risposta corretta e' 2. Calcoliamo la matrice che rappresenta f rispetto alle basi canoniche e troviamo

$$\begin{pmatrix} 11/5 & -11/5 & -1/5 \\ 1/5 & -1/5 & -1/5 \\ 12/5 & -12/5 & -2/5 \end{pmatrix}$$

che e' diagonalizzabile perche' ha come autovalori $2, 0, -2/5$, quindi 5 e' falsa. Si vede facilmente che anche le altre risposte sono false.

(6) La risposta corretta e' 5, perche' $\det(A) = 1 > 0$ e $\det(B) = 0$.

(7) La risposta corretta e' 2. Infatti f va da uno spazio di dimensione 10 a uno di dimensione 10, quindi e' rappresentata da una matrice 10×10.

(8) La risposta corretta e' 4. Infatti $(k, 0, 1, 1)$ appartiene all'immagine di f se e solo se il sistema non omogeneo corrispondente ammette soluzione, cioe' se e solo se le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & k & 1 \\ k & 1 & k-1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & k \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & k-1 & 1 \end{pmatrix}$$

hanno lo stesso rango e questo succede esattamente se

$$k = 1.$$

(9) La risposta corretta e' 4. Applicare la definizione di prodotto scalare e vettoriale.

(10) La risposta corretta e' 4. Usando la classificazione delle coniche si trova che $\det(A) = 0$ solo se $k = -1, -1/2$, mentre $\det(B) = -k^2 \leq 0$. Se $k = -1$ o $k = -1/2$ la conica e' una coppia di rette incidenti. Se $k = 0$ la conica e' una parabola. Per tutti gli altri (infiniti!) valori di k la conica e' un'iperbole.

(11) La risposta corretta e' 2. Il sottospazio $W = \{(1, 2, 3)\}^{\perp}$ e' dato dai vettori ortogonali a $(1, 2, 3)$. In particolare e' un piano e ha dimensione 2. Per sapere quando $\mathcal{B}$ e' una base basta verificare se i suoi elementi appartengono a W cioe' se $(0, -k, 2) \cdot (1, 2, 3) = 0$ e $(-k, 0, 1) \cdot (1, 2, 3) = 0$. Questo succede solo se $k = 3$.