

Soluzioni compito 3 crediti - 17/01/07

- (1) La risposta corretta e' 4. Sappiamo che $\{u, v, w\}$ e' una base positivamente orientata se e solo se il determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & \alpha \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

e' maggiore di 0, quindi se e solo se $2\alpha + 5 > 0$, se e solo se $\alpha > -5/2$. Siccome $\alpha > 0$ implica $\alpha > -5/2$, la risposta 4 e' vera.

- (2) La risposta corretta e' 5. Infatti il piano Π e' $y = 0$, mentre $v_r = (1, 0, -1)$.
(3) La risposta corretta e' 5. Il piano Π ha equazione $x - 2y + z$ e vettore normale $n = (1, -2, 1)$, mentre la retta r ha vettore direttore $v = (1, 1, -1)$. Quindi

$$\sin(\alpha) = \cos(nv) = \frac{n \cdot v}{||n|| ||v||}.$$

- (4) La risposta corretta e' 2. Infatti $\text{Ker}(f)$ e' dato dai vettori che sono paralleli a v_0 , quindi e' un sottospazio vettoriale di dimensione 1 e una sua base e' data da $\{v_0\}$.
(5) La risposta corretta e' 5. Infatti basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + ky + z = -1 \\ x + y - z = 1 \\ y + kz = 1 \end{cases}$$

e verificare che lo spazio delle soluzioni ha dimensione 0 se e solo se $k \neq -1, 2$.

- (6) La risposta corretta e' 4.
(7) La risposta corretta e' 2. Un possibile svolgimento dell'esercizio e' questo: la retta r che cerchiamo passa per il punto $P = (1, 1, -1)$ e ha vettore direttore $v_r = (a, b, c)$ tale che $(a, b, c) \cdot (2, -1, 3) = 0$, da cui si ricava

$$b = 2a + 3c.$$

L'asse delle y ha equazione $x = z = 0$, cioe' vettore direttore $v_y = (0, 1, 0)$ e passa per il punto $O = (0, 0, 0)$. Siccome r e l'asse delle y sono incidenti, sono anche complanari. Allora il seguente determinante si annulla

$$\begin{vmatrix} P - O & v_r & v_y \end{vmatrix} = 0$$

cioe'

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 2a + 3c & 1 \\ -1 & c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

1

da cui si ha $c + a = 0$. Allora possiamo scegliere

$$v_r = (a, -a, -a) = (-1, 1, 1).$$

(Osserviamo anche che r non è parallela all'asse delle y e dunque è necessariamente incidente in un punto.)

- (8) La risposta corretta è 4. Calcolando il polinomio caratteristico si trova che gli autovalori sono $0, 1, k + 1$. Quindi se $k \neq 0, -1$ la matrice è sicuramente diagonalizzabile. Quindi la risposta 4 è vera.
- (9) La risposta corretta è 5. Infatti se scriviamo la matrice che rappresenta f rispetto alle basi canoniche otteniamo

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha autovalori: $0, 3, 1$.

- (10) La risposta corretta è 1.
- (11) La risposta corretta è 3. Infatti se $a \neq -1$, per ogni valore di b lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1. Se $a = -1$ e $b \neq 1$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1. Se $a = -1$ e $b = 1$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2.