

### Soluzioni compito 6 crediti - 17/01/07

- (1) La risposta corretta e' 5.
- (2) La risposta corretta e' 4. Infatti  $\text{Ker}(f)$  e' dato dai vettori che sono paralleli a  $v_0$ , quindi e' un sottospazio vettoriale di dimensione 1 e una sua base e' data da  $\{v_0\}$ .
- (3) La risposta corretta e' 3. Infatti se scriviamo la matrice che rappresenta  $f$  rispetto alle basi canoniche otteniamo

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

che ha autovalori: 0,3,2.

- (4) La risposta corretta e' 1. Se  $a = -1$  e  $b = 1$  la matrice incompleta e quella completa hanno entrambe rango 2, e questi sono gli unici valori di  $a, b$  per cui cio' succede.
- (5) La risposta corretta e' 4. Un possibile svolgimento dell'esercizio e' questo: la retta  $r$  che cerchiamo passa per il punto  $P = (1, 1, -1)$  e ha vettore direttore  $v_r = (a, b, c)$  tale che  $(a, b, c) \cdot (2, -1, 3) = 0$ , da cui si ricava

$$b = 2a + 3c.$$

L'asse delle  $y$  ha equazione  $x = z = 0$ , cioe' vettore direttore  $v_y = (0, 1, 0)$  e passa per il punto  $O = (0, 0, 0)$ . Siccome  $r$  e l'asse delle  $y$  sono incidenti, sono anche complanari. Allora il seguente determinante si annulla

$$\begin{vmatrix} P - O & v_r & v_y \end{vmatrix} = 0$$

cioe'

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 2a + 3c & 1 \\ -1 & c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

da cui si ha  $c + a = 0$ . Allora possiamo scegliere

$$v_r = (a, -a, -a) = (-1, 1, 1).$$

(Osserviamo anche che  $r$  non e' parallela all'asse delle  $y$  e dunque e' necessariamente incidente in un punto.)

- (6) La risposta corretta e' 5. Sappiamo che  $\{u, v, w\}$  e' una base positivamente orientata se e solo se il determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

e' maggiore di 0, quindi se e solo se  $-2\alpha - 5 > 0$ , se e solo se  $\alpha < -5/2$ . Siccome  $\alpha < -3$  implica  $\alpha < -5/2$ , la risposta 3 e' vera.

- (7) La risposta corretta è 3. Il piano  $\Pi$  ha equazione  $x - 2y + z$  e vettore normale  $n = (1, -2, 1)$ , mentre la retta  $r$  ha vettore direttore  $v = (1, -1, 1)$ . Quindi

$$\sin(\alpha) = \cos(nv) = \frac{n \cdot v}{||n|| ||v||}.$$

- (8) La risposta corretta è 1. Infatti il piano  $\Pi$  è  $y = 0$ , mentre  $v_r = (0, 1, 0)$ .
- (9) La risposta corretta è 2. Infatti  $C$  è una coppia di rette incidenti se e solo se  $k = 0$ .
- (10) La risposta corretta è 4. Calcolando il polinomio caratteristico si trova che gli autovalori sono  $0, 1, k + 1$ . Quindi se  $k \neq 0, -1$  la matrice è diagonalizzabile. Nei due casi  $k = 0, -1$  si verifica che la molteplicità geometrica è diversa da quella algebrica e quindi la matrice non è diagonalizzabile.
- (11) La risposta corretta è 5. Per verificare se gli autovalori sono concordi o discordi usare la regola dei segni di Cartesio.