1. Risposta 1.

   Scrivere la matrice dei coefficienti della quadrica e applicare la formula del piano tangente.

2. Risposta 1.

   Classificazione delle quadriche.

3. Risposta 4.

   Siccome i vettori $(1,0,0),(2,-1,3),(0,0,-1)$ sono indipendenti l'applicazione f e' sempre lineare. Siccome anche i tre vettori immagine $(1,0,1)$, $(k,1,-k)$, $(-1,0,1)$ sono sempre indipendenti per qualsiasi valore di k (basta infatti calcolare il determinante e vedere che non si annulla mai), significa che l'immagine ha dimensione 3 e il nucleo dimensione 0. In altre parole f e' sempre suriettiva, iniettiva e biunivoca.

4. Risposta 2.

   Classificazione delle coniche.

5. Risposta 1.

   Il vettore direttore della retta e' $v = (1,-1,1)$. Il normale al piano e' $(1,-2,1)$. L'angolo acuto α e' il complementare dell'angolo acuto β formato da v e n. Quindi

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \mathrm{cotg}(\beta) = \frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)} = \frac{v \cdot n}{||v \wedge n||} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

6. Risposta 3.

   Bisogna trovare per quali k il sistema non omogeneo

$$\begin{cases} x + y + kz = 3 \\ kx + 2y + 3z = -3 \\ 2x + 2y + 3z = k + 4 \end{cases}$$

   ammette soluzione. In altre parole per quali k la matrice completa e quella incompleta hanno lo stesso rango. Si vede che questo NON succede solo per i valori 2 e 3/2.

7. Risposta 4.

   La matrice A ha autovalori $k, k+1, 5$. Se $k \neq 4, 5$ i tre autovalori sono distinti quindi e' diagonalizzabile. I due casi 4 e 5 vanno studiati separatamente e si vede che in tali casi A non e' diagonalizzabile perche' la molteplicita' geometrica e' diversa dall'algebrica

8. Risposta 5.

   La dimensione di $M(m,n)$ e' mn!

Quindi la dimensione di $M(3,3)$ NON e' 3, ma 9. Sapendo che f va da uno spazio di dimensione 4 a uno di dimensione 9 non sappiamo dire niente sul suo nucleo, ma sicuramente la dimensione dell'immagine non puo' essere piu' grande dello spazio di partenza (teorema della dimensione).

9. Risposta 2.

   Chiamiamo $v_1 = (e_1 + 2e_2 - e_3), v_2 = (2e_1 - e_2 + e_3)$, e $v_3 = (7e_1 + 4e_2 - 1e_3)$. Si vede che v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti (calcolando un determinante). Troviamo allora α, β, γ tali che

   $$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0.$$

   In questo caso si trova $\alpha = 3, \beta = 2, \gamma = -1$ Chiamiamo ora le immagini $w_1 = 2e_1 + e_3$, $w_2 = 2e_2 - e_3$, e $w_3 = 6e_1 + (2k)e_2 + e_3$. Siccome f e' lineare deve essere anche

   $$\alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3 = 0,$$

   e questo puo' succedere solo se $k = 2$. A questo punto si sostituisce k nell'equazione e si sceglie quella che e' verificata.

10. Risposta 5.

    Le due rette sono sghembe. Applicando la formula della distanza tra rette sghembe si trova la risposta.

11. Risposta 5.

    L'autospazio relativo a 9 e' per definizione $\mathrm{Ker}(A - 9I)$. Siccome $A - 9I$ ha rango 2 la dimensione del nucleo (ovvero dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato) e' 1.