

Modelli Numerici per la Simulazione

Luigi Brugnano
Università di Firenze

a.a. 2012-13

1 Sistemi dinamici

Molti fenomeni studiati nelle applicazioni sono di tipo *evolutivo*, ovvero sono descritti da un processo dinamico che evolve nel tempo.

Questo tipo di fenomeni sono spesso modellizzati matematicamente mediante un *problema ai valori iniziali* per equazioni *differenziali*, se il tempo assume valori continui, o alle *differenze*, se il tempo assume valori discreti.

Senza perdere in generalità, possiamo formalizzare questi due tipi di problemi, rispettivamente, come:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^m, \quad (2)$$

e

$$y_{n+1} = f(n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

$$y_0 \in \mathbb{R}^m \quad \text{assegnato.} \quad (4)$$

Per semplicità espositiva, supporremo che la soluzione sia definita per ogni scelta della *condizione iniziale* $y_0 \in \mathbb{R}^m$ (nel caso generale potrebbe essere ristretta ad un opportuno dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$), e per ogni $t \geq 0$ o $n \geq 0$ (diversamente, potrebbe aversi $t \in [0, T]$ e $n \in \{0, \dots, N\}$, rispettivamente).

La soluzione $y(t)$ del problema (1)-(2) descrive una *traiettoria continua*, soluzione del problema stesso. Similmente, la soluzione $\{y_n\}$ del problema (3)-(4) descrive una *traiettoria discreta*.

Associata alla equazione (1) è la *mappa continua* (denominata anche *flusso*)

$$\phi_t(y_0) = y(t), \quad t \geq 0, \quad (5)$$

soluzione di (1)-(2). Essa definisce il *sistema dinamico (continuo)* associato alla equazione (1). Similmente, associata alla equazione (3) è la *mappa discreta*

$$\phi_n(y_0) = y_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (6)$$

soluzione di (3)-(4). Essa definisce il *sistema dinamico (discreto)* associato alla equazione (3).

Come nei corsi di base di Analisi Numerica si era interessati allo studio del condizionamento di un problema, ovvero, di quanto variasse la sua soluzione al variare dei dati di ingresso, in questa sede siamo interessati a studiare il comportamento delle *traiettorie soluzione*, al variare della condizione iniziale y_0 . Questo studio è infatti essenziale, alla fine della corretta simulazione dei fenomeni. In particolare, di grande importanza, nello studio dei sistemi dinamici, sono i suoi *insiemi (o strutture) di equilibrio*. Diremo che $P \subset \mathbb{R}^m$ è un *insieme (o struttura) di equilibrio* se

$$\phi_t(P) \equiv P, \quad \forall t \geq 0,$$

nel caso continuo, ovvero

$$\phi_n(P) \equiv P, \quad n = 0, 1, \dots,$$

nel caso discreto, dove la mappa applicata all'insieme P equivale alla sua applicazione ad ogni punto dell'insieme stesso.

Gli insiemi di equilibrio di un sistema dinamico sono molto importanti, specie nella simulazione dei fenomeni, perché se la dinamica è confinata ad essi, allora essa è (relativamente) facilmente prevedibile semplificando, in questo modo, il processo di inferenza sul fenomeno sottostante.

Tuttavia, questi insiemi di equilibrio hanno una rilevanza fisica se piccole perturbazioni della dinamica permettono di rimanere in un loro opportuno intorno, ovvero di ritornarci (almeno asintoticamente). Siamo, cioè, interessati alle *proprietà di stabilità* delle strutture di equilibrio di un sistema dinamico. Queste proprietà di stabilità dovranno, nel caso di modelli continui, essere preservate dai sistemi dinamici discreti indotti dai corrispondenti *metodi di approssimazione numerica*.

Per questo motivo, durante il corso si daranno esempi di sistemi dinamici continui e discreti, nonché della corrispondenza qualitativa (prima che quantitativa) tra i sistemi dinamici discreti ottenuti dalla applicazione dei metodi numerici per approssimare opportuni sistemi dinamici continui: questi ultimi

descritti da *equazioni differenziali*, mentre i primi descritti da corrispondenti *equazioni alle differenze*.

Cominceremo con l'analisi di semplici equazioni alle differenze, per poi passare ad esaminare il caso di equazioni differenziali, e/o alle differenze, più complesse.