

Capitolo 7

Sistemi nonlineari di equazioni

I fenomeni reali sono raramente lineari: pertanto i modelli lineari, che finora abbiamo considerato, sono spesso solo delle approssimazioni di modelli più complessi. In questo capitolo vedremo, in forma molto semplificata, le questioni essenziali riguardanti lo studio di sistemi di equazioni, differenziali e alle differenze, nonlineari.

7.1 Il caso discreto

Sia assegnato il problema discreto nonlineare del primo ordine

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{f}(n, \mathbf{y}_n), \quad n \geq n_0, \quad \mathbf{y}_{n_0} \in \mathbb{R}^m \text{ assegnato.} \quad (7.1)$$

Un vettore $\bar{\mathbf{y}}$ è detto *punto di equilibrio* o *punto critico* se

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(n, \bar{\mathbf{y}}), \quad n \geq n_0. \quad (7.2)$$

Senza perdere in generalità, assumeremo che

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{0}. \quad (7.3)$$

Infatti, se così non fosse, ponendo $\mathbf{z}_n = \mathbf{y}_n - \bar{\mathbf{y}}$, si otterrebbe

$$\mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{f}(n, \mathbf{z}_n + \bar{\mathbf{y}}) - \mathbf{f}(n, \bar{\mathbf{y}}) \equiv \mathbf{g}(n, \mathbf{z}_n),$$

che avrebbe il punto di equilibrio nell'origine.

Ciò premesso, andiamo a dare le seguenti definizioni di stabilità che generalizzano quelle viste nel caso lineare.

Definizione 7.1 *La soluzione nulla di (7.1) si dirà:*

- stabile, se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon, n_0)$ tale che $\|\mathbf{y}_{n_0}\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{y}_n\| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$;
- uniformemente stabile, se è stabile e, inoltre, $\delta = \delta(\varepsilon)$;
- asintoticamente stabile, se è stabile e, inoltre, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{y}_n = \mathbf{0}$;
- uniformemente asintoticamente stabile, se è uniformemente stabile ed asintoticamente stabile;

- esponenzialmente asintoticamente stabile, se

$$\exists a, \delta > 0 \text{ e } \eta \in (0, 1) \text{ tali che } \|y_{n_0}\| \leq \delta \Rightarrow \|y_n\| \leq a\delta \eta^{n-n_0}, \forall n \geq n_0.$$

Osservazione 7.1 Osserviamo che la esponenziale asintotica stabilità implica la uniforme asintotica stabilità ma la velocità con cui le soluzioni tendono a 0 è di tipo esponenziale. Ad esempio, l'equazione

$$y_{n+1} = \frac{|y_n|}{|y_n| + 1}, \quad n \geq n_0,$$

ha l'origine come punto di equilibrio uniformemente asintoticamente stabile ma non esponenzialmente asintoticamente stabile. Infatti,

$$y_n \simeq (n - n_0 + 1)^{-1}, \quad n \geq n_0.$$

Il caso lineare

Nel caso in cui il problema sia lineare (ma, in genere, non autonomo),

$$y_{n+1} = A_n y_n, \quad (7.4)$$

le precedenti definizioni impongono delle condizioni sulla matrice fondamentale Φ_{n,n_0} che, ricordiamo, è soluzione del problema

$$\Phi_{n+1,n_0} = A_n \Phi_{n,n_0}, \quad n \geq n_0, \quad \Phi_{n_0,n_0} = I,$$

ed è tale che $y_n = \Phi_{n,n_0} y_{n_0}$, $n \geq n_0$. Valgono, infatti, i seguenti risultati.

Teorema 7.1 La soluzione nulla di (7.4) è uniformemente stabile se e solo se esiste $M > 0$ tale che:

$$\|\Phi_{n,n_0}\| \leq M, \quad \forall n \geq n_0. \quad (7.5)$$

Dimostrazione. Supponiamo che valga la (7.5). Segue quindi che

$$\|y_n\| = \|\Phi_{n,n_0} y_{n_0}\| \leq \|\Phi_{n,n_0}\| \cdot \|y_{n_0}\| \leq M \|y_{n_0}\|.$$

Pertanto, fissato $\varepsilon > 0$, ponendo $\delta = \delta(\varepsilon) = M^{-1}\varepsilon$, si ha che

$$\|y_{n_0}\| < \delta \Rightarrow \|y_n\| < \varepsilon$$

e, pertanto, la soluzione nulla è uniformemente stabile. Viceversa, supponiamo che la soluzione nulla sia uniformemente stabile, allora $\forall n \geq n_0$

$$\sup_{\|x\|=1} \|\Phi_{n,n_0} x\| \equiv \|\Phi_{n,n_0}\|$$

è limitato, ovvero vale la (7.5). \square

Per la uniforme asintotica stabilità, vale il seguente risultato che non dimostriamo, anche se una implicazione era già stata osservata in precedenza.¹

¹Per la dimostrazione, si veda il Teorema 4.2.2 in [15, pag. 107].

Teorema 7.2 *La soluzione nulla di (7.4) è uniformemente asintoticamente stabile se e solo se $\exists a > 0$ e $\eta \in (0, 1)$ tali che:*

$$\|\Phi_{n,n_0}\| \leq a\eta^{n-n_0}, \quad n \geq n_0. \quad (7.6)$$

Corollario 7.1 *La soluzione nulla di (7.23) è uniformemente asintoticamente stabile se e solo se essa è esponenzialmente asintoticamente stabile.²*

Osservazione 7.2 *Quindi nel caso lineare generale, le proprietà di stabilità della soluzione di equilibrio dipendono dalle proprietà della matrice fondamentale e, pertanto, indipendenti dalla soluzione di equilibrio stessa.*

Processo di linearizzazione

Consideriamo ora sistemi nonlineari del tipo

$$\mathbf{y}_{n+1} = A_n \mathbf{y}_n + \mathbf{g}(n, \mathbf{y}_n), \quad n \geq n_0, \quad \mathbf{y}_{n_0} \in \mathbb{R}^m \text{ dato}, \quad (7.7)$$

in cui A_n è nonsingolare e $\mathbf{g}(n, \mathbf{y})$ è in genere nonlineare e soddisfa

$$\mathbf{g}(n, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \forall n \geq n_0. \quad (7.8)$$

In questo caso, evidentemente, l'origine è ancora un punto critico. Riguardando il termine nonlineare in (7.7) formalmente come un termine noto \mathbf{b}_n , si ottiene, in virtù della (6.18),

$$\mathbf{y}_n = \Phi_{n,n_0} \mathbf{y}_{n_0} + \sum_{i=n_0}^{n-1} \Phi_{n,i+1} \mathbf{g}(i, \mathbf{y}_i), \quad n \geq n_0. \quad (7.9)$$

Da questo si intuisce come, sotto opportune ipotesi, le proprietà di stabilità del punto critico dipendano dalle proprietà di stabilità derivanti dalla parte lineare di (7.7), formalmente data da (7.4). In questo modo, è possibile discutere le proprietà di stabilità del punto critico di (7.1) dove, supponendo che $\mathbf{f}(n, \mathbf{y})$ sia abbastanza regolare rispetto a \mathbf{y} , si ottiene, mediante linearizzazione, che

$$\mathbf{y}_{n+1} = \underbrace{\mathbf{f}(n, \mathbf{0})}_{=\mathbf{0}} + \underbrace{J_{\mathbf{f}}(n, \mathbf{0})}_{\equiv A_n} \mathbf{y}_n + \mathbf{g}(n, \mathbf{y}_n) = A_n \mathbf{y}_n + \mathbf{g}(n, \mathbf{y}_n), \quad (7.10)$$

dove abbiamo denotato con $J_{\mathbf{f}}$ la matrice Jacobiana di \mathbf{f} rispetto a \mathbf{y} e, inoltre, supponendo che \mathbf{f} sia sufficientemente regolare (come assumeremo nel seguito),

$$\|\mathbf{g}(n, \mathbf{y}_n)\| = O(\|\mathbf{y}_n\|^2). \quad (7.11)$$

Osservazione 7.3 *L'equazione linearizzata nel punto di equilibrio, definisce il cosiddetto problema variazionale. In generale, quest'ultimo può essere definito rispetto ad una qualunque soluzione di riferimento.*

Vale il seguente risultato.

Teorema 7.3 *Siano dati il problema (7.10) ed il problema omogeneo associato (7.4). Se:*

²Ovvero, nel caso lineare, uniforme asintotica stabilità ed esponenziale asintotica stabilità di un punto critico sono proprietà equivalenti.

- $\|\mathbf{g}(n, \mathbf{y}_n)\| \leq L\|\mathbf{y}_n\|$, con L sufficientemente "piccolo",
- la soluzione nulla di (7.4) è uniformemente asintoticamente stabile,

allora la soluzione nulla di (7.10) è esponenzialmente asintoticamente stabile.

Dimostrazione. Essendo l'origine uniformemente asintoticamente stabile per la (7.4) esistono, in virtù del Teorema 7.2 $a > 0$ e $\eta \in (0, 1)$ tali che la matrice fondamentale del problema soddisfa (7.6). Pertanto, dalla (7.9) segue che:

$$\|\mathbf{y}_n\| \leq a\eta^{n-n_0}\|\mathbf{y}_{n_0}\| + aL \sum_{i=n_0}^{n-1} \eta^{n-i-1} \|\mathbf{y}_i\|, \quad n \geq n_0.$$

Moltiplicando membro a membro per η^{-n} , e ponendo $p_n = \eta^{-n}\|\mathbf{y}_n\|$, si ottiene

$$p_n \leq ap_{n_0} + aL\eta^{-1} \sum_{i=n_0}^{n-1} p_i, \quad n \geq n_0.$$

Dal Corollario 2.3 (Teorema di Gronwall discreto, vedi (2.28)) segue quindi che:

$$p_n \leq ap_{n_0} \prod_{i=n_0}^{n-1} (1 + aL\eta^{-1}) = ap_{n_0}(1 + aL\eta^{-1})^{n-n_0}, \quad n \geq n_0.$$

Moltiplicando ambo i membri per η^n , si ottiene, quindi:

$$\|\mathbf{y}_n\| \leq a\|\mathbf{y}_{n_0}\|(\eta + aL)^{n-n_0}, \quad n \geq n_0.$$

Si vede quindi che, se L è sufficientemente "piccolo" da aversi:

$$\eta + aL < 1,$$

allora la soluzione è esponenzialmente asintoticamente stabile. \square

Corollario 7.2 (Stabilità in prima approssimazione, caso discreto) *Se la soluzione nulla di*

$$\mathbf{y}_{n+1} = J_{\mathbf{f}}(n, \mathbf{0})\mathbf{y}_n, \quad n \geq n_0$$

è uniformemente asintoticamente stabile e, con riferimento alla (7.10),

$$\lim_{\|\mathbf{y}\| \rightarrow 0} \frac{\|g(n, \mathbf{y})\|}{\|\mathbf{y}\|} = 0$$

uniformemente rispetto a n , allora la stessa è esponenzialmente asintoticamente stabile per (7.1)–(7.3), purché $\|\mathbf{y}_{n_0}\|$ sia sufficientemente piccola.

Dimostrazione. Infatti, dalla (7.11), segue che, per $\|\mathbf{y}\|$ sufficientemente piccolo, definendo

$$L(\varepsilon) = \sup_{\|\mathbf{y}\| \leq \varepsilon} \frac{\|g(n, \mathbf{y})\|}{\|\mathbf{y}\|},$$

si ottiene che $L(\varepsilon)$ è una funzione non decrescente e tale che $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L(\varepsilon) = 0$. Pertanto,

$$\|\mathbf{g}(n, \mathbf{y})\| \leq L(\|\mathbf{y}\|)\|\mathbf{y}\|,$$

e, di conseguenza, ripercorrendo passi analoghi a quelli visti nella dimostrazione del precedente Teorema 7.3, si otterrà:

$$\|\mathbf{y}_n\| \leq a\|\mathbf{y}_{n_0}\| \prod_{i=n_0}^{n-1} (\eta + aL(\|\mathbf{y}_i\|)).$$

Se fosse $a \leq 1$, la tesi discenderebbe facilmente per induzione, imponendo che sia $\|\mathbf{y}_{n_0}\|$ sufficientemente piccola da aversi $\eta + aL(\|\mathbf{y}_0\|) < 1$. In tal caso, infatti, si otterrebbe $\|\mathbf{y}_{n_0+1}\| \leq \|\mathbf{y}_{n_0}\|(\eta + aL(\|\mathbf{y}_0\|))$ e quindi, per induzione,

$$\|\mathbf{y}_n\| \leq \|\mathbf{y}_{n_0}\| (\eta + aL(\mathbf{y}_{n_0}))^{n-n_0}, \quad n \geq n_0,$$

da cui segue l'asserto. Nel caso in cui si abbia $a > 1$, ponendo $z_n = \log \|\mathbf{y}_n\|$, si ottiene:

$$z_n \leq z_0 + \log a + \sum_{i=n_0}^{n-1} \log(\eta + aL(e^{z_i})). \quad (7.12)$$

Supponiamo ora che $\|\mathbf{y}_{n_0}\|$ sia sufficientemente piccola, in modo tale che

$$z_0 < z_0 + \log a \leq -N,$$

con N tale che, per un opportuno $\varepsilon > 0$, si abbia

$$\log(\eta + aL(e^{-N})) \leq -\varepsilon.$$

Pertanto,

$$z_{n_0+1} \leq -N + \log(\eta + aL(e^{z_0})) \leq -N + \log(\eta + aL(e^{-N})) \leq -N - \varepsilon.$$

Ragionando per induzione, dalla (7.12) si ottiene, quindi,

$$z_n \leq -N - (n - n_0)\varepsilon, \quad n \geq n_0,$$

ovvero, per ogni $\|\mathbf{y}_{n_0}\| \leq \delta \equiv e^{-N}a^{-1}$, risulta:

$$\|\mathbf{y}_n\| \leq a\|\mathbf{y}_{n_0}\| \prod_{i=n_0}^{n-1} (\eta + aL(\|\mathbf{y}_i\|)) \leq e^{-N}e^{-\varepsilon(n-n_0)} \equiv a\delta \hat{\eta}^{n-n_0}, \quad n \geq n_0,$$

con $\hat{\eta} = e^{-\varepsilon} < 1$, da cui la tesi segue. \square

Il corollario successivo, particolarmente importante per le applicazioni, riguarda il sistema

$$\mathbf{y}_{n+1} = A\mathbf{y}_n + \mathbf{g}(n, \mathbf{y}_n), \quad \mathbf{g}(n, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad n \geq n_0. \quad (7.13)$$

Corollario 7.3 (Teorema di Perron, versione discreta) *Sia, nella (7.13), $\rho(A) < 1$ e, inoltre,*

$$\lim_{\|\mathbf{y}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{g}(n, \mathbf{y})\|}{\|\mathbf{y}\|} = 0 \quad (7.14)$$

uniformemente rispetto a n . Allora la sua soluzione nulla è esponenzialmente asintoticamente stabile.

Dimostrazione. Essendo $\rho(A) < 1$, la soluzione nulla è (uniformemente) asintoticamente stabile per il sistema

$$\mathbf{y}_{n+1} = A\mathbf{y}_n, \quad n \geq n_0.$$

La tesi discende, quindi, dal precedente Corollario 7.2. \square

Osservazione 7.4 *Chiaramente, se l'origine è instabile per la (7.4), allora lo è anche per la (7.10).*

Il teorema di Perron, insieme al suo corrispettivo continuo che esamineremo successivamente, è di fondamentale importanza nelle applicazioni. Infatti esso giustifica l'uso della parte lineare di equazioni più complesse in luogo di queste ultime. Esso, inoltre, è di utilità anche nella modellistica dei fenomeni (come vedremo). Di seguito, riportiamo alcuni esempi di applicazione che riguardano specificatamente l'Analisi Numerica.

Convergenza dei metodi iterativi per la ricerca degli zeri di funzioni

La ricerca di zeri di sistemi di equazioni nonlineari,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

è effettuata per mezzo di metodi iterativi della forma

$$\mathbf{x}_{n+1} = \phi(\mathbf{x}_n), \quad n \geq 0, \quad (7.15)$$

dove ϕ è la *funzione di iterazione* del metodo. Ad esempio, per il metodo di Newton si ha:

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

dove $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ è la matrice Jacobiana di $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. In questo caso, la soluzione del problema, sia essa $\bar{\mathbf{x}}$, tale che $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$, diviene un punto fisso (ovvero un punto di equilibrio) per la funzione di iterazione:

$$\bar{\mathbf{x}} = \phi(\bar{\mathbf{x}}).$$

Il metodo (7.15) sarà convergente alla soluzione $\bar{\mathbf{x}}$ se l'errore converge al vettore nullo:

$$\mathbf{e}_n \equiv \mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{0}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Sviluppando la ϕ in serie di Taylor in $\bar{\mathbf{x}}$ (che, ovviamente, supponiamo essere definita), dalla (7.15) si ottiene:

$$\mathbf{e}_{n+1} = J_{\phi}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{e}_n + \mathbf{g}(\mathbf{e}_n), \quad n \geq 0,$$

dove

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{e}_n)\| = O(\|\mathbf{e}_n\|^2).$$

Ponendo $A = J_{\phi}(\bar{\mathbf{x}})$, si ottiene

$$\mathbf{e}_{n+1} = A\mathbf{e}_n + \mathbf{g}(\mathbf{e}_n), \quad n \geq 0, \quad (7.16)$$

che è nella forma (7.13). Dal Teorema di Perron, segue quindi che se $\rho(A) < 1$, allora il procedimento risulterà convergente in un opportuno intorno della soluzione stessa. Questo avverrà sempre, sotto opportune ipotesi di regolarità per \mathbf{f} , e assumendo $J_{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}})$ nonsingolare, poiché

$$J_{\phi}(\bar{\mathbf{x}}) = I - \underbrace{J_{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}})^{-1}J_{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}})}_{=I} - F(\bar{\mathbf{x}})\underbrace{\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})}_{=0} = O,$$

dove si è indicato con F il tensore con le derivate rispetto a \mathbf{x} di $J_{\mathbf{f}}^{-1}$. Pertanto, la convergenza sarà sempre assicurata, partendo da un punto iniziale sufficientemente vicino alla radice.

Uso dell'equazione test

Il Teorema di Perron, permette di dare una giustificazione rigorosa per l'analisi di stabilità lineare dei metodi numerici per la risoluzione di equazioni differenziali ordinarie. Infatti, sia dato il problema (che supponiamo scalare, per semplicità e brevità di trattazione)

$$y' = f(y), \quad f(0) = 0, \quad (7.17)$$

avente un punto di equilibrio asintoticamente stabile nell'origine. Utilizzando un metodo (ρ, σ) per la sua risoluzione approssimata con passo h , si otterrà l'equazione alle differenze

$$\rho(E)y_n - h\sigma(E)f(y_n) = 0, \quad n \geq 0.$$

Ponendo $\lambda = f'(0)$, si ottiene quindi

$$\rho(E)y_n - q\sigma(E)y_n - h\sigma(E)g(y_n) = 0, \quad n \geq 0, \quad (7.18)$$

dove

$$q = h\lambda \quad \text{e} \quad g(y_n) = O(y_n^2).$$

Se

$$\rho(z) = \sum_{i=0}^k \alpha_i z^i, \quad \sigma(z) = \sum_{i=0}^k \beta_i z^i,$$

questa equazione alle differenze di ordine k può essere trasformata in un sistema lineare del primo ordine di dimensione k . Infatti, definendo i vettori

$$\mathbf{y}_n = \begin{pmatrix} y_n \\ y_{n+1} \\ \vdots \\ y_{n+k-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{h}{\alpha_k - q\beta_k} \sigma(E)g(y_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k,$$

e la matrice (in forma di Frobenius)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{\alpha_0 - q\beta_0}{\alpha_k - q\beta_k} & \dots & \dots & \dots & -\frac{\alpha_{k-1} - q\beta_{k-1}}{\alpha_k - q\beta_k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times k},$$

la (7.18) può essere riscritta come

$$\mathbf{y}_{n+1} = A\mathbf{y}_n + \mathbf{g}_n$$

che è nella forma richiesta dal Teorema di Perron e, pertanto, se $\rho(A) < 1$, allora la soluzione discreta sarà asintoticamente stabile in un opportuno intorno dell'origine. Essendo la matrice in forma di Frobenius, si ricava che, a meno del fattore moltiplicativo $(\alpha_k - q\beta_k)^{-1}$, il suo polinomio caratteristico è

$$\pi(z, q) = \rho(z) - q\sigma(z)$$

e, pertanto,

$$\rho(A) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad q \in \mathcal{D},$$

essendo \mathcal{D} la regione di assoluta stabilità del metodo (ρ, σ) .

Osservazione 7.5 *In conclusione, il Teorema di Perron giustifica l'analisi di stabilità lineare dei metodi, basata sull'equazione test, nell'intorno di un punto di equilibrio asintoticamente stabile di un sistema autonomo.*

Influenza degli errori di macchina

L'ipotesi (7.14) del Teorema di Perron, che vale in aritmetica *esatta*, è quasi sempre non verificata quando si utilizza l'aritmetica *finita* di un calcolatore. In questo caso, la (7.14) è più realisticamente sostituita da una disequaglianza del tipo

$$\|\mathbf{g}(n, \mathbf{y}_n)\| \leq \delta,$$

dove δ è "piccolo" ma finito.³ In questo caso, se consideriamo ad esempio la (7.16), si ottiene (supponendo, per semplicità, che si abbia $\|A\| < 1$, oltre che $\rho(A) < 1$)⁴:

$$\|\mathbf{e}_{n+1}\| \leq \|A\|\|\mathbf{e}_n\| + \delta, \quad n \geq 0.$$

Da questa, considerando l'equazione del confronto, si ricava facilmente che

$$\|\mathbf{e}_n\| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \|A\|^i \delta = \frac{1 - \|A\|^n}{1 - \|A\|} \delta < \frac{1}{1 - \|A\|} \delta, \quad n \geq 0.$$

Se ne deduce che l'errore dell'equazione perturbata rimane limitato, sebbene si perda la asintotica stabilità dell'origine (che, anzi, potrebbe non essere più un punto critico dell'equazione perturbata). In questo caso, in cui le perturbazioni non sono infinitesime con l'errore, ma *permanenti*, si parla di *problema di stabilità totale*. In maggior dettaglio, in questo caso la soluzione nulla dell'equazione

$$\mathbf{e}_{n+1} = A\mathbf{e}_n, \quad n \geq n_0$$

si dirà *totalmente stabile*.

Stabilità totale

Gli argomenti appena visti possono essere estesi ad equazioni più generali della (7.16). Più in generale, se consideriamo le equazioni:

$$\mathbf{y}_{n+1} = f(n, \mathbf{y}_n) + R(n, \mathbf{y}_n), \quad n \geq n_0, \quad (7.19)$$

$$\mathbf{y}_{n+1} = f(n, \mathbf{y}_n), \quad f(n, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad (7.20)$$

abbiamo che l'origine è un punto di equilibrio per la (7.20) (ma non necessariamente per la (7.19)).

Definizione 7.2 *Diremo che l'origine è totalmente stabile (o stabile rispetto a perturbazioni permanenti) per la (7.20) se, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$ e $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon)$ tali che, per la soluzione $\{\mathbf{y}_n\}$ di (7.19):*

$$\|\mathbf{y}_{n_0}\| < \delta_1 \quad e \quad \|R(n, \mathbf{y}_n)\| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{y}_n\| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

A riguardo, è possibile dimostrare il seguente risultato (vedi [15, pag. 137]).

Teorema 7.4 *Se l'origine è uniformemente asintoticamente stabile per (7.20), e f è Lipschitziana rispetto a \mathbf{y} , allora l'origine è totalmente stabile.*

³Ad esempio, potrebbe aversi $\delta \simeq \varepsilon$, la *precisione di macchina* dell'aritmetica utilizzata.

⁴In realtà, tra tutte le norme indotte su matrice, ce n'è sempre una per cui $\rho(A) = \|A\|$.

7.2 Il caso continuo

Argomenti del tutto analoghi possono essere ripetuti nel caso di sistemi nonlineari di equazioni differenziali,

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m, \quad (7.21)$$

in cui, al solito senza perdere in generalità, si suppone che

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \forall t \geq t_0. \quad (7.22)$$

Ovvero, $\mathbf{0}$ è un *punto di equilibrio*, o *punto critico*, per (7.21). Le seguenti definizioni, costituiscono la controparte continua di quanto visto nella precedente sezione.

Definizione 7.3 *La soluzione nulla di (7.21)-(7.22) si dirà:*

- stabile, se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ tale che $\|\mathbf{y}_0\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{y}(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$;
- uniformemente stabile, se è stabile e, inoltre, $\delta = \delta(\varepsilon)$;
- asintoticamente stabile, se è stabile e, inoltre, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$;
- uniformemente asintoticamente stabile, se è uniformemente stabile ed asintoticamente stabile;
- esponenzialmente asintoticamente stabile, se

$$\exists \alpha, \beta, \delta > 0 \text{ tali che } \|\mathbf{y}_0\| \leq \delta \Rightarrow \|\mathbf{y}(t)\| \leq \alpha \delta e^{-\beta(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0.$$

Osservazione 7.6 *Analogamente al caso discreto, anche ora osserviamo che la esponenziale asintotica stabilità implica la uniforme asintotica stabilità ma la velocità con cui le soluzioni tendono a 0 è di tipo esponenziale. Ad esempio, l'equazione*

$$y' = -y^2, \quad t \geq t_0, \quad \text{con condizione iniziale} \quad y(t_0) = a > 0,$$

ha l'origine come punto di equilibrio uniformemente asintoticamente stabile ma non esponenzialmente asintoticamente stabile. Infatti,

$$y(t) = \frac{a}{a(t-t_0) + 1} \simeq t^{-1}, \quad t \gg t_0.$$

Il caso lineare

Nel caso in cui il problema sia lineare (ma, in genere, non autonomo),

$$\mathbf{y}'(t) = A(t)\mathbf{y}(t), \quad (7.23)$$

le precedenti definizioni impongono delle condizioni sulla matrice fondamentale $\Phi(t, t_0)$ che, ricordiamo, è soluzione del problema

$$\Phi'(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad t \geq t_0, \quad \Phi(t_0, t_0) = I.$$

Analogamente al caso discreto, valgono, infatti, i seguenti risultati.

Teorema 7.5 *La soluzione nulla di (7.23) è uniformemente stabile se e solo se esiste $M > 0$ tale che:*

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq M, \quad \forall t \geq t_0.$$

Teorema 7.6 *La soluzione nulla di (7.23) è uniformemente asintoticamente stabile se e solo se $\exists \alpha, \beta > 0$ tali che:*

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq \alpha e^{-\beta(t-t_0)}, \quad t \geq t_0.$$

Corollario 7.4 *La soluzione nulla di (7.23) è uniformemente asintoticamente stabile se e solo se essa è esponenzialmente asintoticamente stabile.⁵*

Osservazione 7.7 *Quindi nel caso lineare generale, le proprietà di stabilità della soluzione di equilibrio dipendono dalle proprietà della matrice fondamentale e, pertanto, indipendenti dalla soluzione di equilibrio stessa.*

Processo di linearizzazione

Analogamente a quanto visto nel caso discreto, consideriamo ora sistemi nonlineari del tipo

$$\mathbf{y}'(t) = A(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t)), \quad t \geq t_0, \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m, \quad (7.24)$$

in cui $\mathbf{g}(t, \mathbf{y})$ è in genere nonlineare e soddisfa

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \forall t \geq t_0. \quad (7.25)$$

In questo caso, evidentemente, l'origine è ancora un punto critico. Riguardando il termine nonlineare in (7.24) formalmente come un termine noto $\mathbf{b}(t)$, si ottiene, in virtù della (6.8),

$$\mathbf{y}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)\mathbf{g}(\tau, \mathbf{y}(s))ds, \quad t \geq t_0. \quad (7.26)$$

Analogamente al caso discreto, da questo si intuisce come, sotto opportune ipotesi, le proprietà di stabilità del punto critico dipendano dalle proprietà di stabilità derivanti dalla parte lineare della (7.24), formalmente data da (7.23). In questo modo, è possibile discutere le proprietà di stabilità del punto critico di (7.21) dove, supponendo che $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ sia abbastanza regolare rispetto a \mathbf{y} , si ottiene, mediante linearizzazione, che

$$\mathbf{y}'(t) = \underbrace{\mathbf{f}(t, \mathbf{0})}_{=\mathbf{0}} + \underbrace{J_{\mathbf{f}}(t, \mathbf{0})}_{\equiv A(t)}\mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t)) = A(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t)), \quad (7.27)$$

dove abbiamo denotato con $J_{\mathbf{f}}$ la matrice Jacobiana di \mathbf{f} rispetto a \mathbf{y} e, inoltre, supponendo che \mathbf{g} sia sufficientemente regolare,

$$\|\mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t))\| = O(\|\mathbf{y}(t)\|^2).$$

Osservazione 7.8 *Come nel caso discreto, l'equazione linearizzata nel punto di equilibrio, definisce il cosiddetto problema variazionale. In generale, quest'ultimo può essere definito rispetto ad una qualunque soluzione di riferimento.*

⁵Ovvero, anche nel caso continuo, nel caso lineare uniforme asintotica stabilità ed esponenziale asintotica stabilità di un punto critico sono proprietà equivalenti.

Vale il seguente risultato, che si dimostra con argomenti simili a quelli utilizzati nel caso discreto.

Teorema 7.7 *Siano dati il problema (7.27) ed il problema lineare associato (7.23). Se:*

- $\|g(t, y(t))\| \leq L\|y(t)\|$, con L sufficientemente “piccolo”,
- la soluzione nulla di (7.23) è uniformemente asintoticamente stabile,

allora la soluzione nulla di (7.27) è esponenzialmente asintoticamente stabile.

Inoltre, analogamente al caso discreto, si dimostra il seguente risultato.

Corollario 7.5 (Stabilità in prima approssimazione, caso continuo) *Se la soluzione nulla dell'equazione*

$$y' = J_f(t, 0)y, \quad t \geq t_0,$$

è uniformemente asintoticamente stabile e, con riferimento alla (7.27),

$$\lim_{\|y\| \rightarrow 0} \frac{\|g(t, y)\|}{\|y\|} = 0$$

uniformemente rispetto a t , allora la stessa è esponenzialmente asintoticamente stabile per (7.21)–(7.22), purché $\|y(t_0)\|$ sia sufficientemente piccola.

Il corollario successivo, riguarda il sistema

$$y'(t) = Ay(t) + g(t, y(t)), \quad g(t, 0) = 0, \quad t \geq t_0, \quad (7.28)$$

e si dimostra in modo analogo al caso discreto.

Corollario 7.6 (Teorema di Perron, versione continua) *Dato il sistema di equazioni (7.28), se $\sigma(A) \subset \mathbb{C}^-$ e, inoltre,*

$$\lim_{\|y\| \rightarrow 0} \frac{\|g(t, y)\|}{\|y\|} = 0$$

uniformemente rispetto a t , allora la sua soluzione nulla è esponenzialmente asintoticamente stabile.

Osservazione 7.9 *Analogamente al caso discreto, se l'origine è instabile per la parte lineare (7.23), allora lo è anche per la (7.27).*

Osservazione 7.10 *Anche le questioni di stabilità totale si trattano in modo analogo a quanto visto nel discreto, e con risultati del tutto simili.*

Giustificazione dell'equazione test

Consideriamo ancora una volta l'equazione (7.17), avente l'origine come punto critico. Si ottiene, ponendo $\lambda = f'(0)$ e supponendo f sufficientemente regolare:

$$y' = \lambda y + g(y), \quad \text{con} \quad g(y) = O(y^2).$$

Pertanto, se l'origine è asintoticamente stabile per la parte lineare (cioè, se $\Re(\lambda) < 0$), allora essa sarà esponenzialmente asintoticamente stabile per (7.17). In altri termini, il Teorema di Perron giustifica l'utilizzo dell'equazione test

$$y' = \lambda y, \quad \Re(\lambda) < 0,$$

nell'intorno di un punto di equilibrio uniformemente asintoticamente stabile.

Ad esempio, per il problema (4.45), la linearizzazione nel punto di equilibrio $\bar{y} = 5$ fornisce l'equazione linearizzata (traslando \bar{y} nell'origine) $y' = -10y$, per cui l'origine è asintoticamente stabile.

Modello per la diagnosi del diabete mellito

Il diabete mellito è una patologia che si manifesta con una elevata concentrazione del glucosio nel sangue e nelle urine.⁶ La funzione del glucosio è quella di portare energia alle cellule. Esso è presente nel sangue con una concentrazione ottimale che indicheremo con \bar{G} . Tale concentrazione aumenta in seguito alla ingestione di cibo, o può diminuire in seguito ad un aumentato bisogno dell'organismo. A regolare il meccanismo di aumento o diminuzione della concentrazione del glucosio nel sangue vi sono diversi ormoni. Tra questi, si menzionano i seguenti:

Insulina. È secreta dalle cellule β del pancreas. Esso favorisce l'assorbimento del glucosio da parte delle cellule e di conseguenza la diminuzione della sua concentrazione.

Glucagone. È secreto dalle cellule α del pancreas. Un eccesso di glucosio nel sangue viene trasformato in glicogeno ed immagazzinato nel fegato. In caso di ipoglicemia, cioè bassa concentrazione di glucosio, il glucagone favorisce la trasformazione di glicogeno in glucosio e quindi favorisce l'aumento di concentrazione di quest'ultima sostanza.

Adrenalina. È prodotto dalle capsule surrenali e fa aumentare la concentrazione del glucosio nel sangue attivando un processo più rapido e più completo rispetto al glucagone, oltre che inibendo la produzione di insulina, mediante riduzione della funzionalità del pancreas. Questo processo si attiva in casi di elevata ipoglicemia o in situazioni di pericolo ed è finalizzata a rendere disponibile il glucosio da parte dei muscoli.

Cortisolo. Anche questo ormone è prodotto dalle ghiandole surrenali. Esso stimola la glucogenesi epatica, con un conseguente aumento della glicemia.

Il modello che descriviamo considera solo l'interazione glucosio-insulina. Sebbene modelli più completi siano stati formulati, nondimeno questo è assai utilizzato nella pratica clinica. Siano dunque $G(t)$ ed $H(t)$ le concentrazioni del glucosio e dell'insulina nel sangue e \bar{G} , \bar{H} le concentrazioni ottimali. Il modello è il seguente.

$$\begin{aligned} G' &= F_1(G, H), \\ H' &= F_2(G, H). \end{aligned}$$

Se la concentrazione delle due sostanze nel sangue è ai livelli ottimali, il meccanismo di regolazione non viene attivato, cioè si avrà:

$$\begin{aligned} F_1(\bar{G}, \bar{H}) &= 0, \\ F_2(\bar{G}, \bar{H}) &= 0, \end{aligned}$$

⁶Esiste anche una forma senile di diabete, dovuta a deficit metabolici dovuti all'età.

Questo significa che (\bar{G}, \bar{H}) è un punto di equilibrio per il sistema. Il meccanismo di regolazione sarà funzionante se una perturbazione nell'intorno di questo punto, tenderà ad essere smorzata fino a ritornare al punto di equilibrio. Il punto di equilibrio deve dunque essere asintoticamente stabile.⁷

Supporremo che le funzioni F_1 ed F_2 siano sviluppabili in serie di Taylor almeno fino al secondo termine. Introducendo le variabili

$$g(t) = G(t) - \bar{G}, \quad \text{e} \quad h(t) = H(t) - \bar{H},$$

il modello può scriversi nella forma

$$\begin{aligned} g' &= -m_1g - m_2h + \gamma_1(g, h), \\ h' &= m_3g - m_4h + \gamma_2(g, h), \end{aligned}$$

dove le funzioni $\gamma_1(g, h)$, $\gamma_2(g, h)$ rappresentano i termini di ordine superiore nello sviluppo in serie e $m_i > 0$, $i = 1, \dots, 4$. La parte lineare del modello è stata evidenziata in maniera che i segni dei coefficienti appaiano chiaramente indicati. Convincersi che i segni siano quelli indicati è abbastanza semplice. Infatti se, per esempio, al tempo $t = t_0$ si parte da una situazione in cui vi sia eccesso di glucosio ($g > 0$) ed $h = 0$, il meccanismo di autoregolazione sarà attivato e si avrà, a meno di termini infinitesimi di ordine superiore,

$$g'(t_0) \simeq \frac{\partial F_1}{\partial g}(0, 0) \equiv -m_1 < 0$$

e, inoltre,

$$h'(t_0) \simeq \frac{\partial F_2}{\partial g}(0, 0) \equiv m_3 > 0.$$

Il meccanismo farà, cioè, diminuire il glucosio e aumentare l'insulina. Similmente, se per $t = t_0$ si avesse $g = 0$ e $h > 0$, entrambe le derivate saranno negative. È facile verificare che gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -m_1 & -m_2 \\ m_3 & -m_4 \end{pmatrix}$$

sono a parte reale negativa e quindi, per la parte lineare del sistema, l'origine è asintoticamente stabile. Dunque, per il Teorema di Perron, l'origine è asintoticamente stabile per il sistema completo.

Questo modello può essere utilizzato per la diagnosi del diabete mellito. Infatti, se il ritorno al livello di equilibrio è troppo lento, questo si configura come una condizione patologica. Il test per rilevare la correttezza del meccanismo di autoregolazione, si basa sulla verifica della concentrazione del solo glucosio (la cui misura si fa facilmente ed è poco dispendiosa).⁸ Per questo motivo, ricercheremo un'espressione matematica che contenga solo la variabile G . Derivando la prima delle due equazioni rispetto al tempo, e tenendo conto della seconda, si ha, infatti⁹

$$g'' = -m_1g' - m_2(m_3g - m_4h).$$

Ricavando h dalla prima e sostituendo, si ha

$$g'' + (m_1 + m_4)g' + (m_1m_4 + m_2m_3)g = 0.$$

⁷Diversamente, si andrebbe in coma per iperglicemia o ipoglicemia.

⁸Esistono addirittura misuratori portatili della glicemia, che utilizzano una goccia di sangue prelevata da un dito.

⁹Al solito, si considera la sola parte lineare del modello.

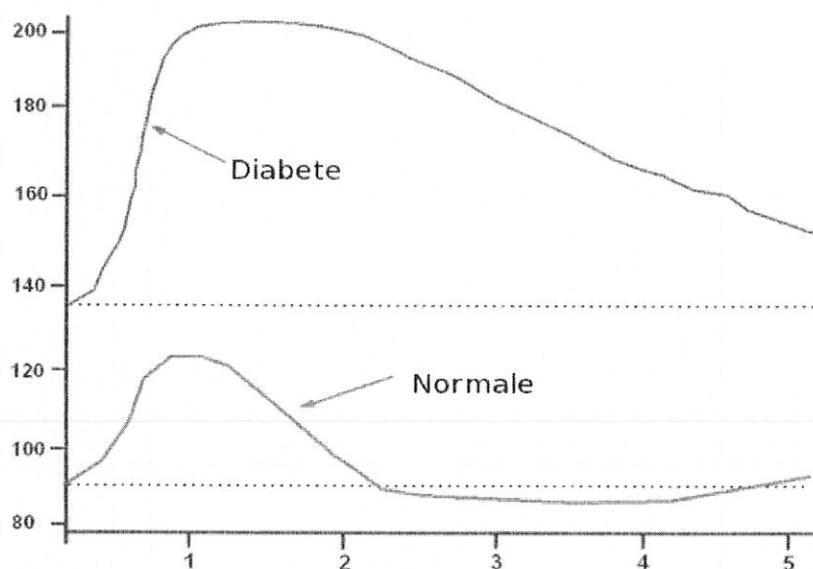


Figura 7.1: Esempi di curva da carico normale (in basso) e con diabete mellito (in alto).

Posti

$$\beta^2 = m_1 m_4 + m_2 m_3, \quad 2\alpha = m_1 + m_4,$$

si ottiene

$$g'' + 2\alpha g' + \beta^2 g = 0.$$

La soluzione, ponendo $t_0 = 0$, è

$$g(t) = Ae^{-\alpha t} \cos(\omega t + \phi), \quad \text{dove} \quad \omega^2 = \beta^2 - \alpha^2 > 0.$$

Tornando alla vecchia variabile, si ha

$$G(t) = \bar{G} + Ae^{-\alpha t} \cos(\omega t + \phi).$$

Le quantità α , A , ω , ϕ devono essere determinate in base ai risultati dei test. Poiché la prima misura della glicemia si esegue dopo una nottata di digiuno, si assume che essa fornisca il valore di equilibrio \bar{G} . Successivamente, viene fatta assumere al paziente una certa quantità di glucosio (dell'acqua zuccherata, con una quantità di zucchero proporzionale al peso corporeo) e si eseguono m misurazioni G_i , della glicemia ad istanti prefissati t_i , $i = 1, \dots, m$. I parametri incogniti si possono quindi ricavare con il metodo dei minimi quadrati. Si definisce cioè la funzione

$$F(\alpha, \omega, A, \phi) = \sum_{i=1}^m (G_i - \bar{G} - Ae^{-\alpha t_i} \cos(\omega t_i + \phi))^2$$

e se ne cerca il minimo rispetto alle sue variabili. In particolare ω è il parametro meno sensibile agli errori sperimentali. Il diabete è diagnosticato quando $\bar{T} > 126 \text{ mg/dl}$ e

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} > 3.5 \text{ ore.}$$

A titolo di esempio, due curve da carico sono raffigurate in Figura 7.1. Sull'asse orizzontale, il tempo è misurato in *ore*, mentre su quello verticale la glicemia è misurata in *mg/dl*. La curva inferiore è normale e, come si può vedere, il ritorno all'equilibrio si ha in poco più di 2 ore. In quella superiore, a parte il valore molto alto della glicemia iniziale, il ritorno all'equilibrio si ottiene dopo oltre 5 ore.

7.3 Il caso di stabilità marginale

Il Teorema di Perron, nella sua versioni continue e discrete, permettono di studiare la stabilità del punto di equilibrio nel caso in cui tale punto di equilibrio sia asintoticamente stabile (o instabile) per il sistema linearizzato. Nel caso in cui per quest'ultimo il punto di equilibrio sia solo stabile, nulla si può dire sul comportamento del sistema completo, come dimostrato dal seguente esempio. Sia, per $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}x' &= -y + \alpha x \sqrt{x^2 + y^2} \\y' &= x + \alpha y \sqrt{x^2 + y^2}.\end{aligned}\tag{7.29}$$

La parte lineare,

$$x' = -y, \quad y' = x,$$

è marginalmente stabile, poiché gli autovalori della matrice

$$\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$$

sono $\pm i$. Se consideriamo il problema completo, tuttavia, passando in coordinate polari,

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta,$$

si ottiene

$$\begin{aligned}\rho' \cos \theta - \rho \sin \theta \theta' &= -\rho \sin \theta + \alpha \rho^2 \cos \theta, \\ \rho' \sin \theta + \rho \cos \theta \theta' &= \rho \cos \theta + \alpha \rho^2 \sin \theta.\end{aligned}$$

Moltiplicando la prima equazione per $\cos \theta$, la seconda per $\sin \theta$ e sommando, si ottiene:

$$\rho' = \alpha \rho^2.\tag{7.30}$$

Similmente, moltiplicando la prima equazione per $-\sin \theta$, la seconda per $\cos \theta$ e sommando, si ottiene:

$$\theta' = 1.$$

La soluzione di quest'ultima equazione, ponendo $\theta(0) = \theta_0$, è

$$\theta(t) = \theta_0 + t, \quad t \geq 0.$$

Pertanto, le traiettorie si avvolgeranno attorno all'origine in senso antiorario. Assumendo, per la (7.30) la condizione iniziale $\rho(0) = \rho_0 > 0$, la soluzione si verifica essere data da

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{1 - \alpha \rho_0 t}, \quad t \geq 0.$$

Pertanto, se $\alpha < 0$ si ottiene un fuoco stabile mentre, nel caso $\alpha > 0$, per $t \rightarrow (\alpha\rho)^{-1}$ la traiettoria diviene illimitata.¹⁰ Poiché la parte lineare non dipende dal parametro α , si comprende come le sue proprietà non diano informazione nel caso di stabilità marginale.

7.4 Funzioni di Lyapunov

Abbiamo già evidenziato che lo studio del comportamento qualitativo delle soluzioni di un sistema nonlineare nell'intorno di un punto di equilibrio mediante l'analisi della parte lineare non è sempre possibile. Anche la tecnica che stiamo per descrivere non è applicabile in tutti i casi. Tuttavia, ove utilizzabile, essa risulta essere molto semplice e potente. Essa fu proposta dal matematico A.M. Lyapunov verso la fine del diciannovesimo secolo. Si consideri, per semplicità, il problema autonomo¹¹

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m, \quad (7.31)$$

che supponiamo ammetta un'unica soluzione per $t \geq 0$, ed ammetta l'origine come unico punto critico:

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{0}.$$

Supponiamo, ora, che esista una funzione differenziabile e con derivate continue $V : \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{y}) &\geq 0, \\ V(\mathbf{y}) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{0}, \\ V(\mathbf{y}) &\rightarrow \infty \quad \text{per} \quad \mathbf{y} \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (7.32)$$

Inoltre, in un opportuno intorno dell'origine, supporremo inoltre che valga:

$$\nabla V(\mathbf{y})^T \mathbf{f}(\mathbf{y}) \leq 0, \quad \nabla V(\mathbf{y})^T \mathbf{f}(\mathbf{y}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (7.33)$$

Osserviamo che, essendo $V(\mathbf{y})$ positiva, ed avendosi $V(\mathbf{y}) \rightarrow \infty$, per $\mathbf{y} \rightarrow \infty$, le regioni

$$\Gamma(c) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : V(\mathbf{y}) \leq c\}, \quad c \geq 0, \quad (7.34)$$

saranno costituite da componenti connesse chiuse e limitate, di cui una, sia essa $\mathcal{R}(c)$, conterrà l'origine. Infatti, se $c_1 > c_2$, si avrà, evidentemente, $\Gamma(c_2) \subseteq \Gamma(c_1)$ e, inoltre, $\Gamma(0) \equiv \mathcal{R}(0) = \{\mathbf{0}\}$. È interessante osservare che, se $\exists c > 0$ per cui

$$\nabla V(\mathbf{y})^T \mathbf{f}(\mathbf{y}) < 0, \quad \forall \mathbf{y} \in \partial \mathcal{R}(c),$$

questo significa che traiettorie del sistema dinamico indotto da (7.31) che originano da punti su $\partial \mathcal{R}(c)$, saranno dirette verso l'interno di questa regione. Infatti, $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ per le soluzioni di (7.31), mentre $\nabla V(\mathbf{y})$ è un vettore ortogonale alla superficie di livello $\{V(\mathbf{y}) = c\} \equiv \partial \mathcal{R}(c)$, e diretto verso valori crescenti di c . Pertanto, una volta che una traiettoria entra in $\mathcal{R}(c)$, non ne uscirà più. Per questo motivo, diremo che $\mathcal{R}(c)$ è una *regione invariante* per il sistema dinamico. Con questa premessa, è possibile dimostrare il seguente risultato, che è una versione semplificata del risultato originale di Lyapunov.

¹⁰Chiaramente, per $\alpha = 0$ si ha un centro.

¹¹La trattazione del caso non autonomo risulta essere più complessa.

Teorema 7.8 (Teorema di Lyapunov) *Se $\exists c > 0$ tale che, per ogni $\mathbf{y} \in \mathcal{R}(c)$ valga (7.33), allora l'origine è asintoticamente stabile per (7.31).*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{y}(t)$ la traiettoria soluzione di (7.31), dove \mathbf{y}_0 è un generico punto di $\mathcal{R}(c)$. Per quanto detto innanzi, varrà:

$$\mathbf{y}(t) \in \mathcal{R}(c), \quad \forall t \geq 0.$$

Evidentemente, essendo

$$V(\mathbf{y}(t)) \geq 0, \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt}V(\mathbf{y}(t)) = \nabla V(\mathbf{y}(t))^T \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)) \leq 0, \quad t \geq 0,$$

$V(\mathbf{y}(t))$ ammetterà un limite, sia esso $V_\infty \geq 0$ per $t \rightarrow \infty$. Se questo limite fosse 0, la tesi sarebbe dimostrata, perché questo implicherebbe che $\mathbf{y}(t) \rightarrow \mathbf{0}$, per $t \rightarrow \infty$. Se per assurdo così non fosse, allora $\exists \bar{\mathbf{y}} \in \mathcal{R}(c)$, $\bar{\mathbf{y}} \neq \mathbf{0}$, tale che

$$V(\bar{\mathbf{y}}) = V_\infty, \quad \text{e} \quad \mathbf{y}(t) \rightarrow \bar{\mathbf{y}}, \quad \text{per } t \rightarrow \infty.$$

Considerando la traiettoria $\mathbf{y}(t; 0, \bar{\mathbf{y}})$, soluzione di (7.31), che parte da $\bar{\mathbf{y}}$, si avrebbe dunque

$$V(\mathbf{y}(t; 0, \bar{\mathbf{y}})) \equiv V_\infty > 0, \quad \forall t \geq 0,$$

ma questo è assurdo, poiché, essendo $\bar{\mathbf{y}} \neq \mathbf{0}$, risulta:

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{y}(0; 0, \bar{\mathbf{y}})) = \nabla V(\bar{\mathbf{y}})^T \mathbf{f}(\bar{\mathbf{y}}) < 0. \quad \square$$

Definizione 7.4 *Una funzione che soddisfi le (7.32)-(7.33), si dice funzione di Lyapunov per (7.31).*

Argomenti del tutto analoghi possono essere utilizzati nel caso del sistema di equazioni alle differenze del primo ordine:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{y}_n), \quad \mathbf{y}_{n_0} \in \mathbb{R}^m \text{ assegnato.} \quad (7.35)$$

Supporremo, al solito, che l'origine sia l'unico punto critico per (7.35):

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{0}.$$

Definizione 7.5 *Se esiste una funzione derivabile e con derivate continue $V : \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, soddisfacente (7.32) e, per ogni \mathbf{y} appartenente ad un opportuno intorno dell'origine,*

$$\Delta V(\mathbf{y}) \equiv V(\mathbf{f}(\mathbf{y})) - V(\mathbf{y}) \leq 0, \quad \Delta V(\mathbf{y}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad (7.36)$$

diremo che V è una funzione di Lyapunov per (7.35).

Definendo, come nel caso continuo, le regioni (7.34), ed indicando con $\mathcal{R}(c)$ la componente connessa contenente l'origine, vale il seguente risultato, che è la versione discreta del Teorema 7.8, la cui dimostrazione si ottiene con argomenti simili.

Teorema 7.9 (Teorema di Lyapunov, versione discreta) *Se $\exists c > 0$ tale che, per ogni $\mathbf{y} \in \mathcal{R}(c)$ valga (7.36), allora l'origine è asintoticamente stabile per (7.35).*

Esempio.

Consideriamo nuovamente il sistema di equazioni (7.29), per il quale l'origine è solo marginalmente stabile per il problema linearizzato, e definiamo la funzione:

$$V(x, y) = x^2 + y^2.$$

Si verifica facilmente che essa soddisfa le condizioni (7.32). Inoltre, dalla (7.29) si ottiene:

$$\nabla V(x, y)^T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \alpha (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 0 \quad \text{e} \quad (x, y)^T \neq (0, 0)^T.$$

Pertanto, per $\alpha < 0$, si conclude che sono soddisfatte anche le (7.33). Di conseguenza, V è una funzione di Lyapunov per (7.29), e possiamo concludere che l'origine è asintoticamente stabile quando $\alpha < 0$, che è esattamente quello che avevamo visto in precedenza.

7.5 Ancora sul concetto di *stiffness*

Approfondiamo ulteriormente la nozione di *stiffness* introdotta in Sezione 6.5. La nostra analisi generalizza quella fatta per il caso lineare al caso nonlineare. Dato, quindi, il problema nonlineare (che supporremo per semplicità autonomo)

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)), \quad t \in [t_0, T], \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \quad (7.37)$$

perturbandone la condizione iniziale con un vettore $\delta \mathbf{y}_0 \equiv \boldsymbol{\eta}$ "infinitesimo", si ha che la differenza tra la soluzione originaria, e quella del problema perturbato, sia essa $\delta \mathbf{y}(t)$, soddisferà il *problema variazionale*

$$\delta \mathbf{y}'(t) = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{y}(t)) \delta \mathbf{y}(t), \quad t \in [t_0, T], \quad \delta \mathbf{y}(0) = \boldsymbol{\eta}, \quad (7.38)$$

in cui

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{y}(t)) \equiv A(t),$$

è la matrice Jacobiana di $\mathbf{f}(\mathbf{y}(t))$. Se la perturbazione non è infinitesima, (7.38) costituisce la parte lineare del problema linearizzato lungo $\mathbf{y}(t)$ e, utilizzando argomenti analoghi a quelli visti per il Teorema 7.7, l'asintotica stabilità dell'origine per la soluzione di (7.38) ne implica l'asintotica stabilità per il problema completo. Considerando, quindi, la corrispondente matrice fondamentale:

$$\Phi'(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = I,$$

se ne deduce che la soluzione del problema (7.38) è data da

$$\delta \mathbf{y}(t) = \Phi(t, t_0) \boldsymbol{\eta}, \quad t \in [t_0, T].$$

Come nel caso lineare, consideriamo le seguenti due norme dell'errore:

$$\|\delta \mathbf{y}\|_{\infty} = \max_{t_0 \leq t \leq T} \|\delta \mathbf{y}(t)\| = \frac{\max_{t_0 \leq t \leq T} \|\delta \mathbf{y}(t)\|}{\|\boldsymbol{\eta}\|} \|\boldsymbol{\eta}\| \equiv \kappa(\boldsymbol{\eta}) \|\boldsymbol{\eta}\|,$$

$$\|\delta \mathbf{y}\|_1 = \frac{1}{T - t_0} \int_{t_0 \leq t \leq T} \|\delta \mathbf{y}(t)\| dt = \frac{\int_{t_0 \leq t \leq T} \|\delta \mathbf{y}(t)\| dt}{(T - t_0) \|\boldsymbol{\eta}\|} \|\boldsymbol{\eta}\| \equiv \gamma(\boldsymbol{\eta}) \|\boldsymbol{\eta}\|,$$

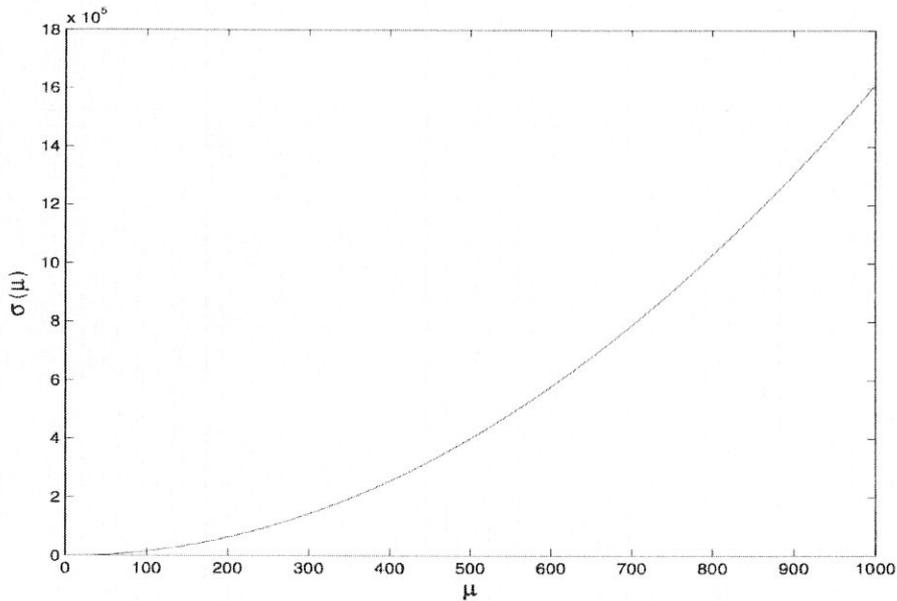


Figura 7.2: *stiffness* del problema di van der Pol (7.40) al crescere di μ .

che misurano, come visto in Sezione 6.5, l'errore massimo e l'errore medio dovuto alla perturbazione iniziale η . Possiamo quindi definire il *rapporto di stiffness*

$$\sigma = \sup_{\eta} \sigma(\eta), \quad \text{con} \quad \sigma(\eta) = \frac{\kappa(\eta)}{\gamma(\eta)}. \quad (7.39)$$

Definizione 7.6 Diremo che il problema (7.37) è stiff se $\sigma \gg 1$.

Osservazione 7.11 È opportuno ribadire che il concetto di stiffness si definisce per un problema, e non per un'equazione. Infatti, la stessa equazione definisce problemi diversi, a seconda del punto iniziale considerato. Al contrario del caso lineare, in cui la stiffness non dipende dalla condizione iniziale, per equazioni nonlineari, alcune condizioni iniziali possono dare origine a problemi stiff, ed altri originare problemi non stiff. La ragione di questo deriva dal fatto che il problema variazionale (7.38) è definito lungo la soluzione di riferimento e, quindi, dipende dal punto iniziale in (7.37).

7.5.1 Alcuni esempi

Riportiamo, nel seguito, alcuni esempi che illustrano adeguatamente la precedente definizione. In tutti i casi, il problema dipende da un parametro scalare positivo che rende il problema "stiff" quando questo tende a 0 o a ∞ :

- il problema di Van der Pol, $\mu \rightarrow \infty$;
- il problema di Robertson, $T \rightarrow \infty$;
- il problema di Kreiss e sua modifica, $\varepsilon \rightarrow 0$.

Il problema di van der Pol

Consideriamo il seguente problema, dipendente da un parametro $\mu > 0$:

$$\begin{aligned} x' &= y, & t \in [0, 2\mu], \\ y' &= -x + \mu y(1 - x^2), & x(0) = 2, \quad y(0) = 0, \end{aligned} \quad (7.40)$$

la cui soluzione descrive un'orbita chiusa attrattiva¹² nel piano delle fasi (il periodo della soluzione risulta essere $\simeq 2\mu$, per $\mu \gg 1$.) In Figura 7.2, grafichiamo il rapporto di *stiffness* (7.39) al crescere di μ . Da essa si evince come il problema diventi più *stiff* al crescere del parametro μ . Questo è infatti noto dalla pratica computazionale, in cui si sperimenta una crescente difficoltà nella risoluzione numerica del problema, per il quale i metodi espliciti sono del tutto inefficaci, anche per modesti valori del parametro μ .

Il problema di Robertson

Questo problema, molto noto nella letteratura del settore, è dato da:

$$\begin{aligned} y_1' &= -0.04y_1 + 10^4 y_2 y_3, \\ y_2' &= 0.04y_1 - 10^4 y_2 y_3 - 3 \cdot 10^7 y_2^2, \\ y_3' &= 3 \cdot 10^7 y_2^2, & t \in [0, T], \\ y_1(0) &= 1, \quad y_2(0) = y_3(0) = 0. \end{aligned} \quad (7.41)$$

In Figura 7.3, è graficato il rapporto di *stiffness* (7.39) in funzione dell'ampiezza T dell'intervallo di integrazione. In questo caso, il rapporto di *stiffness* graficato è stato ottenuto considerando una perturbazione della forma $(0, \varepsilon, -\varepsilon)^T$, con $\varepsilon \approx 0$. Anche in questo caso, si vede che la *stiffness* del problema aumenta al crescere di T , confermando la difficoltà che si incontra, nella pratica computazionale, quando si integra questo problema su intervalli molto ampi.

Esercizio 7.1 *Dimostrare che, per il problema (7.41), la quantità $y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$ è costante per $t \geq 0$. Essa costituisce, quindi, un invariante lineare per il corrispondente sistema dinamico. Dimostrare che ogni metodo consistente preserva questo invariante nella soluzione discreta.*

Il problema di Kreiss

Questo problema, denominato *problema di Kreiss*, è lineare ma *non autonomo*:¹³

$$y'(t) = Q^T(t) \begin{pmatrix} -1 & \\ & -\varepsilon^{-1} \end{pmatrix} Q(t)y(t), \quad t \in [0, 4\pi], \quad y(0) = y_0, \quad (7.42)$$

in cui y_0 è dato¹⁴ e

$$Q(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Considerando una perturbazione iniziale della forma $(-\varepsilon, 1)^T$, si ottiene il rapporto di *stiffness* in funzione di ε raffigurato in Figura 7.4, che dimostra come esso si comporti come $O(\varepsilon^{-1})$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

¹²Si parla, in questo caso, di *ciclo limite*.

¹³Ovvero, la matrice di trasformazione dipende dal t .

¹⁴Il problema è lineare e, quindi, la sua *stiffness* sarà indipendente dalla condizione iniziale.

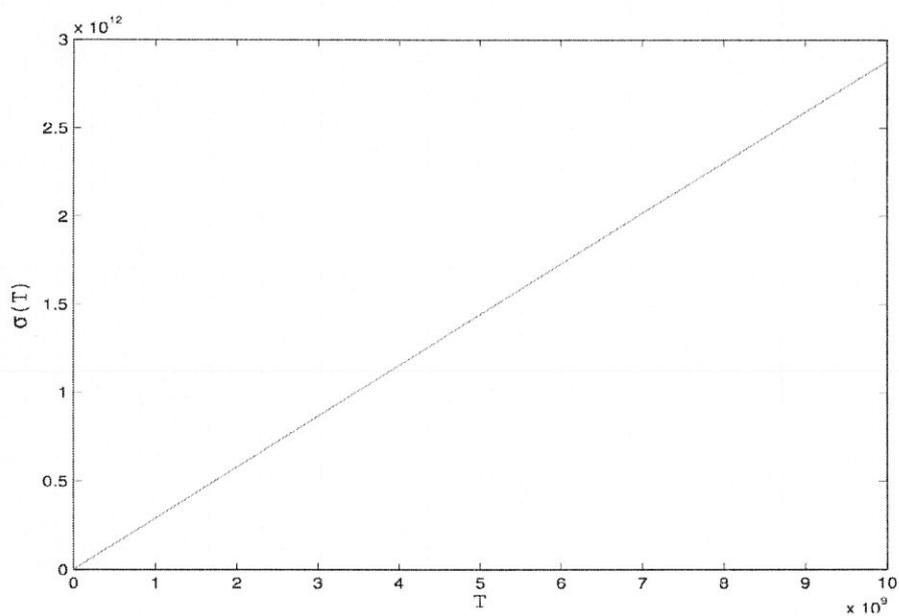


Figura 7.3: *stiffness* del problema di Robertson (7.41) in funzione dell'ampiezza T dell'intervallo di integrazione.

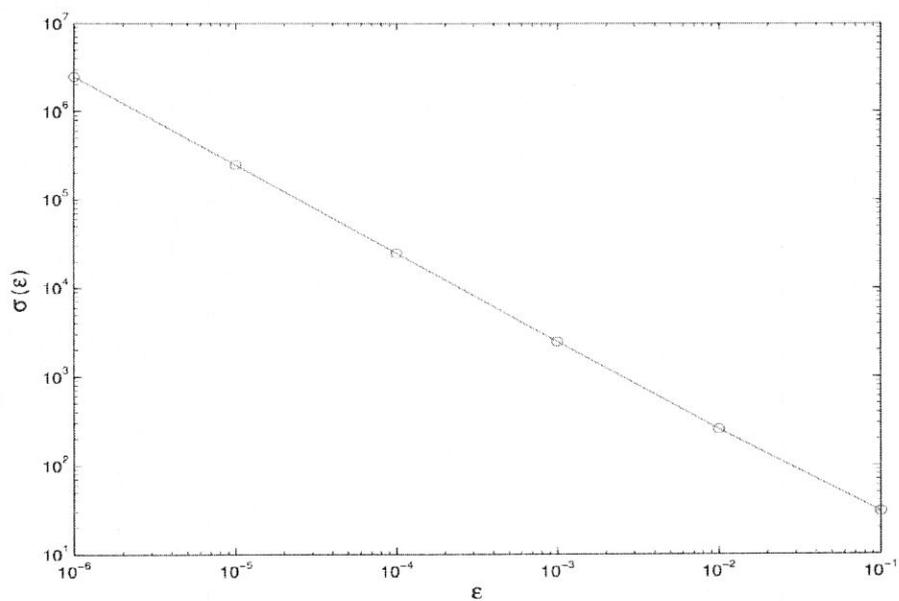


Figura 7.4: *stiffness* del problema (7.42) in funzione di ϵ .

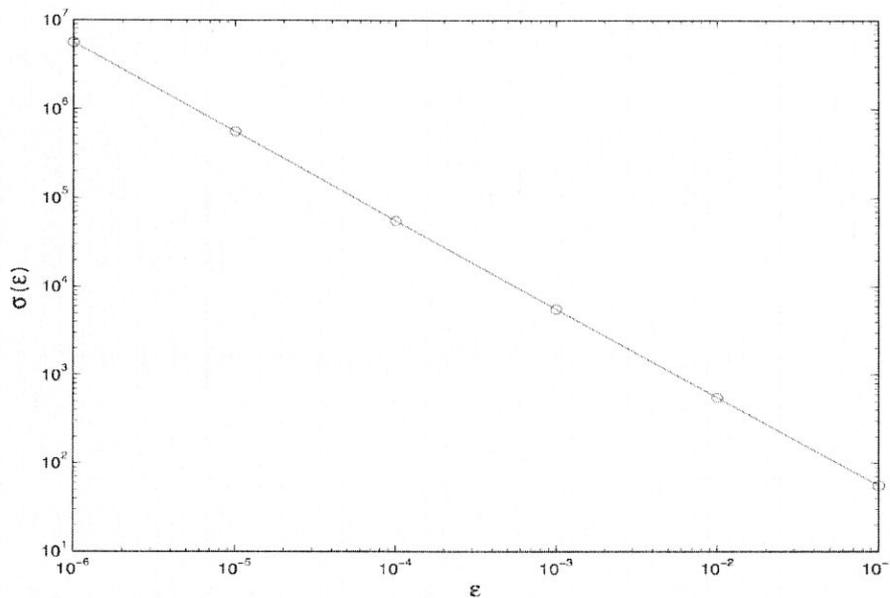


Figura 7.5: *stiffness* del problema (7.43) in funzione di ε .

Consideriamo, ora, la seguente modifica del problema (7.42),

$$\mathbf{y}'(t) = Q_\varepsilon^{-1}(t)P^{-1} \begin{pmatrix} -1 & \\ & -\varepsilon^{-1} \end{pmatrix} PQ_\varepsilon(t)\mathbf{y}(t), \quad t \in [0, 4\pi], \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \quad (7.43)$$

in cui:

$$Q_\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ e^{\sin t} & e^{\cos t} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Anche ora, considerando una perturbazione iniziale della forma $(-\varepsilon, 1)^T$, si ottiene il rapporto di *stiffness* in funzione di ε raffigurato in Figura 7.5, che dimostra come anch'esso si comporti come $O(\varepsilon^{-1})$, per $\varepsilon \rightarrow 0$.

In entrambi i casi, i risultati riguardo alla *stiffness* rispecchiano la crescente difficoltà nella risoluzione numerica dei due problemi, quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Una osservazione

È interessante sottolineare che, in tutti i precedenti esempi, numericamente si è osservato che la perturbazione $\boldsymbol{\eta}$ che massimizza il rapporto $\sigma(\boldsymbol{\eta})$ in (7.39) è ottenuta considerando un vettore proporzionale all'autovettore dominante dello Jacobiano $J_f(\mathbf{y}(t))$ per $t \approx t_0$ (vedi (7.38)). Osserviamo che, nel caso di un problema lineare autonomo, questa scelta è proprio quella che “attiva” l'autovalore dominante, sia esso λ_{\max} . Pertanto, nel caso in cui la matrice sia diagonalizzabile, il rapporto di *stiffness* (7.39) si riduce all'espressione

$$\sigma = |\lambda_{\max}|(T - t_0),$$

che coincide con la (6.33) vista in Sezione 6.5.