
Seconda prova di esonero di Calcolo Numerico.

Esercizio 1. Calcolare le norme 1, 2 e ∞ dei vettori

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Esercizio 2. Dimostrare che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

è ortogonale. Calcolarne il numero di condizione in norma 1, 2, e ∞ .

Esercizio 3. Scrivere una function Matlab che, avendo in ingresso una matrice triangolare superiore ed un vettore di pari dimensione, risolva efficientemente il corrispondente sistema lineare.

Esercizio 4. Sotto quali ipotesi una matrice nonsingolare $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è fattorizzabile LU ?

Esercizio 5. Dimostrare che una matrice simmetrica e definita positiva è fattorizzabile LU .

Esercizio 6. Calcolare i vettori e le matrici di Householder relativi ai vettori \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 definiti in (1).

Esercizio 7. Le misurazioni, x_1, \dots, x_5 , di un fenomeno ai tempi t_1, \dots, t_5 sono riportate nella seguente tabella:

t_i	1	1.5	3	2	3.5
x_i	3.1	4	7.1	4.9	8.1

Scrivere il sistema lineare sovradeterminato che definisce i coefficienti della *retta di approssimazione ai minimi quadrati*, $r(t) := \alpha t + \beta$, che meglio approssima i dati in tabella.

Esercizio 8. Calcolare la prima iterazione del metodo di Newton, partendo dal punto iniziale $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)^\top = (0, \pi/2)^\top$, applicato al sistema di equazioni

$$\sqrt{2}x_1 - \cos(x_2) = 0, \quad 8x_1x_2 - \pi = 0.$$
