Esercitazione relativa alla seconda prova
di esonero intermedia di Calcolo Numerico.

Esercizio 1. Calcolare il vettore elementare di Gauss, e la corrispondente matrice elementare L, tali che

$$L\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Dimostrare che se $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, con $m>n=\text{rank}(A)$, allora la matrice $A^\top A$ è simmetrica e definita positiva.

Esercizio 3. Dimostrare che, se una matrice nonsingolare A è fattorizzabile LU, allora la sua fattorizzazione è unica.

Esercizio 4. Dimostrare che se A è una matrice simmetrica e definita positiva, allora esiste la fattorizzazione $A=LDL^\top$, con L triangolare inferiore a diagonale unitaria e D matrice diagonale. Che segno hanno gli elementi diagonali di D?

Esercizio 5. Scrivere una function Matlab che, data in ingresso una matrice simmetrica e definita positiva A, fornisca in uscita una matrice B, la cui porzione triangolare inferiore contiene l'informazione sui fattori L e D della fattorizzazione $A=LDL^\top$.

Esercizio 6. Scrivere una function Matlab che, avendo in ingresso la matrice B prodotta dalla function del precedente esercizio, ed il termine noto del sistema lineare $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$, calcoli efficientemente la soluzione $\mathbf{x}$.

Esercizio 7. Dimostrare che se Q è una matrice ortogonale, allora $\kappa_2(Q)=1$.

Esercizio 8. Calcolare la prima iterazione del metodo di Newton, partendo dal punto iniziale $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)^\top = (0,0)^\top$, applicato al sistema di equazioni

$$\sin(x_1) - \cos(x_2) = 0, \qquad 2 - x_1 - 2\sin(x_2) = 0.$$
