1) $\|\underline{x}_1\| = \begin{cases} 1 = 4 \\ 2 = 2 \\ \infty = 1 \end{cases}$ $\|\underline{x}_2\| = \begin{cases} 1 = |\alpha|+|\beta|+1 \\ 2 = \sqrt{1+\alpha^2+\beta^2} \\ \infty = \max\{|\alpha|, |\beta|, 1\} \end{cases}$

2) $A^T A = \begin{bmatrix} \cos^2\theta+\sin^2\theta & 0 \\ 0 & \cos^2\theta+\sin^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

$\|A\| = \|A^T\| = \|A^{-1}\| = \begin{cases} 1: |\cos\theta| + |\sin\theta| \\ \infty: |\cos\theta| + |\sin\theta| \\ 2: 1 \end{cases} \Rightarrow K(A) = \begin{cases} 2: 1 \\ 1/\infty: (|\cos\theta| + |\sin\theta|)^2 \end{cases}$

3)
```
function x= trisolve (U,b)
% ... commenti adeguati %
n= length(b);
[m,k]= size(U);   if m~=k || m~=n, error, end
x= b(:);  if U(n,n)==0, error, else, x(n)= x(n)/U(n,n); end
for i= n-1:-1:1
    x(1:i)= x(1:i)- U(1:i,i+1)*x(i+1);
    if U(i,i)==0, error, else, x(i)=x(i)/U(i,i); end
end
return
```

4) Tutte le sottomatrici principali di A devono essere nonsingolari.

5) Dimostreremo l'asserto dimostrando che:
a) se A è sdp $\Rightarrow$ A è nonsingolare;
b) se A_k è la sottomatrice principale di ordine k di A, allora A_k è sdp, $\forall k = 1,\dots,n =$ dim. di A.

a) Se A fosse singolare $\Rightarrow \exists \underline{x} \neq \underline{0}: A\underline{x} = \underline{0} \Rightarrow \underline{x}^T A \underline{x} = 0$, mentre deve essere $\underline{x}^T A \underline{x} > 0$, perché A è sdp.
b) Sia A_k la generica matrice principale di ordine k di A. Pertanto:
$A = \left[\begin{array}{c|c} A_k & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$, con $A_k \in \mathbb{R}^{k\times k}$ e $D \in \mathbb{R}^{n-k\times n-k}$. Per la simmetria di A, segue $A = A^T = \left[\begin{array}{c|c} A_k^T & C^T \\ \hline B^T & D^T \end{array}\right]$. Uguagliando i blocchi omologhi, segue $B = C^T$, $D = D^T$, $A_k = A_k^T$. Inoltre, se $\underline{y} \in \mathbb{R}^k$, $\underline{y} \neq \underline{0} \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{y} \\ \underline{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ è non banale. Inoltre, $\underline{x}^T A \underline{x} = \underline{y}^T A_k \underline{y} > 0$, perché A è sdp $\Rightarrow$ A_k è a sua volta sdp.

6) Sia $\underline{v}_1$ il vettore di Householder relativo a $\underline{x}_1$.
Risulta: $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{2}{\underline{v}_1^T \underline{v}_1} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \Rightarrow H_1 = I_4 - \frac{1}{6} \underline{v}_1 \underline{v}_1^T$.

$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} \alpha + s\sqrt{\alpha^2+\beta^2+1} \\ -\beta \\ 1 \end{pmatrix}$, dove $s = \begin{cases} 1, \text{ se } \alpha \geq 0 \\ -1, \text{ se } \alpha < 0 \end{cases}$; $H_2 = I_3 - \gamma \underline{v}_2 \underline{v}_2^T$,

con $\gamma = \dfrac{2}{1+\beta^2+(\alpha+s\sqrt{\alpha^2+\beta^2+1})^2}$

7) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.5 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3.5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3.1 \\ 4 \\ 7.1 \\ 4.9 \\ 8.1 \end{bmatrix}.$

---

8) $\underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sin\frac{\pi}{2} \\ 4\pi & 0 \end{bmatrix}}_{= \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 4\pi & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ -\pi \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} d_1 = 1/4 \\ d_2 = -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1^1 = x_1^0 + d_1 = \frac{1}{4} \\ x_2^1 = x_2^0 + d_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \end{matrix}$