Prova di esonero relativa al capitolo 3

Esercizio 1 Scrivere una function Matlab che risolva un sistema lineare triangolare superiore per colonne.

Esercizio 2 Cosa significa dire che una matrice è fattorizzabile LU, e sotto quali condizioni questo è possibile? Spiegare, quindi, perché la seguente matrice A lo è:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & & \\ 2 & -4 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & 2 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{10\times 10}.$$

Esercizio 3 È noto che è possibile sovrascrivere una matrice fattorizzabile LU con l'informazione dei suoi fattori L ed U. Scrivere una funcion Matlab,

```
x = LUsolve( LU, b ),
```

che avendo in ingresso la matrice sovrascritta, `LU`, ed il termine noto del sistema lineare da risolvere, `b`, ne calcoli il vettore soluzione `x`.

Esercizio 4 Calcolare le norme 1 e ∞ della matrice A dell' Esercizio 2. Calcolarne, inoltre, una maggiorazione della norma 2.

Esercizio 5 Si supponga che, nel sistema lineare 10×10

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{b} = \pi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{pmatrix}$$

la matrice A abbia numero di condizione 10^3, misurato nella norma ∞. Dare una maggiorazione dell'errore nella soluzione calcolata, supponendo che la matrice A sia esattamente rappresentabile, mentre il termine noto $\boldsymbol{b}$ è soggetto all'errore di rappresentazione della doppia precisione IEEE.

Esercizio 6 Scrivere le matrici elementari di Householder relative ai vettori

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad e \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 1

```
function x = Lsolve(L,b)
%
% x = Lsolve(L,b)   risolve il sistema triangolare inferiore Lx=b.
%
n= length(L); x=b;
for i=1:n
    if L(i,i)==0, error('matrice singolare'), end
    x(i)= x(i)/L(i,i);
    x(i+1:n) = x(i+1:n) - x(i) * L(i+1:n,i);
end
return
```

Esercizio 2

A è fattorizzabile LU, se $A=LU$, con L triangolare inferiore a diagonale unitaria e U triangolare superiore. A è fattorizzabile LU, se tutte le sue sottomatrici principali sono nonsingolari. La matrice A dell'esercizio è diagonale dominante, sia per righe che per colonne, e, quindi, fattorizzabile LU.

Esercizio 3

```
function x = LUsolve(LU,b)
%
% x = LUsolve(LU,b)   risolve il sistema lineare Ax=b,
%                     dove A è fattorizzata LU nella
%                     matrice LU.
n= length(b); x=b;    % risolvo per il fattore L
for i=1:n-1
    x(i+1:n) = x(i+1:n) - LU(i+1:n,i) * x(i);
end
for i=n:-1:1          % risolvo per il fattore U
    x(i) = x(i) / LU(i,i);
    x(1:i-1) = x(1:i-1) - x(i) * LU(1:i-1,i);
end
return
```

Esercizio 4

$\|A\|_1 = \|A\|_\infty = 7 \Rightarrow \|A\|_2 \le \sqrt{\|A\|_1 \cdot \|A\|_\infty} = 7.$

Esercizio 5

In generale, si ha: $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \kappa(A) \cdot \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right).$

Nel nostro caso: $\|\Delta A\| = 0$, $\|\Delta b\| = \|b\| \cdot u$, $u \approx 10^{-16}$, $\kappa(A) = 10^3$. Pertanto, $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le 10^{-13}$.

Esercizio 6

La matrice di Householder tale che $H\underline{x} = \alpha \underline{e}_1$ è data da $H = I - \frac{2}{\underline{v}^T\underline{v}} \underline{v}\,\underline{v}^T$, con

$\underline{v} = \underline{x} - \alpha \underline{e}_1 = \begin{pmatrix} x_1-\alpha \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, se $\underline{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x_1$ e $-\alpha$ devono essere concordi, e $\alpha^2 = \|\underline{x}\|_2^2$.

Pertanto, nel nostro caso:

$\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow H_1 = I_3 - \frac{2}{\underline{v}_1^T\underline{v}_1} \underline{v}_1\underline{v}_1^T$,

$\alpha_1 = \|\underline{x}_1\|_2 = 3$, $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -1-3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\underline{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow H_2 = I_3 - \frac{2}{\underline{v}_2^T\underline{v}_2} \underline{v}_2\underline{v}_2^T$,

$\alpha_2 = -\|\underline{x}_2\|_2 = -3$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1-\alpha_2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$;