**Seconda prova di recupero relativa ai capitoli 1–3**

---

**Esercizio 1** Spiegare cosa è l'errore di rappresentazione quando si utilizza un'aritmetica finita. Definire, quindi, la corrispondente *precisione di macchina* e spiegarne il significato.

**Esercizio 2** Scrivere una function Matlab che implementi efficientemente il metodo di bisezione per la ricerca di uno zero di una funzione.

**Esercizio 3** Derivare il metodo di Newton per la ricerca di uno zero di una funzione.

**Esercizio 4** Definire l'ordine di convergenza di un metodo iterativo per la ricerca degli zeri di una funzione; dimostrare che il metodo di Newton converge quadraticamente ad una radice semplice.

**Esercizio 5** Scrivere una function Matlab che, data in ingresso una matrice triangolare inferiore $L$ ed un vettore $\boldsymbol{b}$, calcoli efficientemente la soluzione del sistema lineare $L\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

**Esercizio 6** Definire cosa è la fattorizzazione $LU$ di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$; spiegare a cosa serve; dire sotto quali condizioni una matrice $A$ è fattorizzabile $LU$.

**Esercizio 7** Dimostrare che, se $A$ è una matrice a diagonale dominante, per righe o per colonne, allora essa è fattorizzabile $LU$.

**Esercizio 8** Scrivere una function Matlab che, data in ingresso una matrice $A$, ne calcoli efficientemente la fattorizzazione $LU$ con *pivoting* parziale.

**Esercizio 9** Spiegare esaurientemente in che modo la fattorizzazione $QR$ di una matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, con $m > n = \text{rank}(A)$, è utilizzabile per risolvere il sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ nel senso dei minimi quadrati.

---

**Esercizio 1** L'insieme dei numeri di macchina $\mathcal{M}$ è un insieme finito, con i cui elementi è possibile rappresentare un insieme, $\mathcal{I}$, denso, che è un sottoinsieme dei numeri reali. Questo avviene mediante una funzione, $fl: \mathcal{I} \to \mathcal{M}$ che associa ad ogni elemento $x \in \mathcal{I}$, il suo "floating", $fl(x) \in \mathcal{M}$. L'errore di rappresentazione è dato dalla differenza $x - fl(x)$. Se la rappresentazione è in base $b$, con $m$ cifre significative, la precisione di macchina dell'aritmetica finita è definita come

$$u = \begin{cases} b^{1-m}, & \text{se si utilizza troncamento,} \\ \frac{1}{2} b^{1-m}, & \text{se si utilizza arrotondamento.} \end{cases}$$

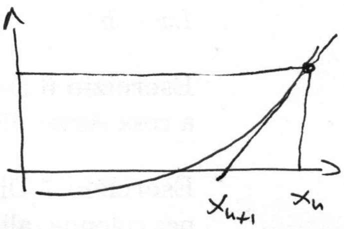
$u$ fornisce una maggiorazione uniforme dell'errore relativo di rappresentazione.

**Esercizio 2**

```
function x = bise(fun, a,b, tolx)
% <inserire commenti appropriati>
%
fa = feval(fun,a); fb=feval(fun,b); if fa*fb>0, error('___'), end
if fa==0 , x=a; return; elseif fb ==0, x=b; return, end
nmax= ceil(log2((b-a)/tolx));
for i=1:nmax
    df = abs(fb-fa)/(b-a);
    x= (a+b)/2; fx=feval(fun,x);
    if abs(fx)<= df*tolx, return;
    elseif fa*fx<0,  b=x; fb=fx;
    else   a=x; fa=fx;
    end
end
return
```

**Esercizio 3** Il metodo di Newton si ottiene mediante l'espressione dello zero della tangente al grafico della funzione $f$ nel punto $(x_n, f_n)$:

$$y = f_n + f'(x_n)(x - x_n) = 0 \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{\overbrace{f(x_n)}^{f_n}}{f'(x_n)}, \quad n=0,1,\dots$$




**Esercizio 4**
Se il metodo converge ad una radice $\bar{x}$ semplice ($\Leftrightarrow f'(\bar{x}) \neq 0$), allora:

$$0 = f(\bar{x}) = f(x_n + (\bar{x} - x_n)) = f(x_n) + f'(x_n)(\bar{x} - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(\bar{x} - x_n)^2 \quad (\xi_n \in I(x_n, \bar{x}))$$

$$= f'(x_n)\Big[\underbrace{\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - x_n}_{x_{n+1}} + \bar{x}\Big] + f''(\xi_n)(\bar{x} - x_n)^2 \Rightarrow \frac{x_{n+1} - \bar{x}}{(x_n - \bar{x})^2} = \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})}.$$

Questo ci dice che il metodo ~~di~~ Newton converge quadraticamente ad una radice semplice. Infatti, l'ordine di un metodo iterativo $x_{n+1} = \Phi(x_n)$, $n=0,1,\dots$ convergente a $\bar{x}$ è $p$, se $p$ è il più grande reale per cui:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|\bar{x} - x_{n+1}|}{|\bar{x} - x_n|^p} = c < \infty,$$

con $c$ la costante asintotica dell'errore.

**Esercizio 5**

```
function x = sol(L,b)
% <inserire commenti appropriati>
%
[m,n]=size(L); k=length(b); if m~=n|| m~=k, error('___'); end
x=b(:);
for i=1:n
    if L(i,i)==0, error('matrice singolare'); end
    x(i)=x(i)/L(i,i);
    x(i+1:n)=x(i+1:n)-L(i+1:n,i)*x(i);
end
return
```

**Esercizio 6** $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ si dice fattorizzabile LU se è scrivibile nella forma $A=L\cdot U$, con $L$ triangolare inferiore a diagonale unitaria, e $U$ triangolare superiore. Se $A$ è nonsingolare, essa serve a risolvere il sistema lineare $Ax=b$ come $Ly=b$ e $Ux=y$, che sono di facile soluzione. La fattorizzazione è definita se $A$ ha tutti i suoi minori principali nonnulli.

**Esercizio 7** $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ è diagonale dominante (d.d.) per righe se: $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$, $i=1,\dots,n$. Per colonne, se $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ji}|$, $i=1,\dots,n$.

Chiaramente, ~~se~~ $A$ è d.d. per righe $\Leftrightarrow$ $A^T$ è d.d. per colonne.
Inoltre, si vede facilmente che, detta $A_k$ la sottomatrice principale di ordine $k$ di $A$, risulta: $A$ d.d. (per righe o per colonne) $\Rightarrow \forall k=1,\dots,n$: $A_k$ è d.d. (per righe o per colonne). Pertanto, dimostrando l'implicazione $A$ d.d. (per righe o per colonne) $\Rightarrow A$ nonsingolare, si deduce che $A$ è, in questo caso, fattorizzabile LU.

Sia dunque $A$ d.d. per righe (altrimenti si considera la sua trasposta). Se, per assurdo, fosse $A$ singolare, allora $\exists\, \underline{x}\in\mathbb{R}^n$, $\underline{x}\neq\underline{0}$ : $A\underline{x}=\underline{0}$. (*)
Supponiamo che il vettore $\underline{x}$ sia normalizzato in modo tale che si abbia $|x_i| = \|\underline{x}\|_\infty = 1$. Considerando l'eq. $i$-esima in (*), si ottiene:
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \Rightarrow -a_{ii}\underbrace{x_i}_{1} = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j \Rightarrow |a_{ii}| = \left|\sum_{j\neq i} a_{ij}x_j\right| \le \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\cdot|x_j| \le \sum_{j\neq i}|a_{ij}|$, che contraddice l'ipotesi di d.d. di $A$.
Pertanto, si ottiene un assurdo e, quindi, $A$ deve essere nonsingolare.

**Esercizio 8**

```
[B,p]= palu(A)
[B,p]= palu(A) ,---                 error('—'), end
% [B,p]= palu(A)            if m~=n,
% size di A;
[m,n] = size di A;
B= A;  p= (1:n)';
for i=1:n
    [mi,ind]= max(abs(B(i:n,i)));
    if mi==0, error('matrice singolare'); end
    if ind>1, ii= i+ind-1;  B([i,ii],:) = B([ii,i],:);
                            p([i,ii]) = p([ii,i]); end
    B(i+1:n,i) = B(i+1:n,i)/B(i,i);
    B(i+1:n,i+1:n) = B(i+1:n,i+1:n) - B(i+1:n,i)*B(i,i+1:n);
end
return
```

**Esercizio 9** Se $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $m\ge n=\mathrm{rank}(A) \Rightarrow \exists\, Q\in\mathbb{R}^{m\times m}$, $Q^TQ=I_m$, $\hat{R}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ triangolare superiore e nonsingolare, tali che $A=QR=Q\binom{\hat{R}}{0}$, con $R\in\mathbb{R}^{m\times n}$. Pertanto, si rammenta, inoltre, che se $Q$ è ortogonale, allora $\|Q\underline{x}\|_2=\|\underline{x}\|_2$. Volendo minimizzare la norma del vettore residuo, si ha: $\|\underline{r}\|_2^2 \equiv \|A\underline{x}-\underline{b}\|_2^2 = (*)$,
$(*) = \|QR\underline{x}-\underline{b}\|_2^2 = \|Q(R\underline{x}-\underbrace{Q^T\underline{b}}_{\underline{g}})\|_2^2 = \|R\underline{x}-\underline{g}\|_2^2 = \left\|\binom{\hat{R}}{0}\underline{x}-\binom{\underline{g}_1}{\underline{g}_2}\right\|_2^2$, con $\underline{g}_1\in\mathbb{R}^n$,
$= \|\hat{R}\underline{x}-\underline{g}_1\|_2^2 + \|\underline{g}_2\|_2^2 = \|\underline{g}_2\|_2^2 = \min!$, scegliendo $\underline{x}$ come soluzione del sistema lineare $\hat{R}\underline{x}=\underline{g}_1$.