Calcolo Numerico
Prova in itinere 1
SOLUZIONI

Esercizio 1.
Si consideri un'aritmetica finita per rappresentare i numeri reali con base $b = 10$, $m = 4$ cifre di mantissa, $s = 3$ cifre per l'esponente e shift $\nu = 500$. Sia v il vettore

$$v = [1.2 \times 10^{612}, \, -34.2 \times 10^{432}, \, 321 \times 10^{490}].$$

- Stabilire se il vettore v può essere rappresentato nell'aritmetica indicata, e motivare la risposta.

  Si consideri il primo elemento di v, ovvero 1.2×10^{612}. Per rappresentare tale numero nell'aritmetica indicata, in particolare dovremmo essere in grado di rappresentare l'esponente nella forma

  $$612 = e - \nu \quad \Rightarrow \quad e = 1112,$$

  ma $e = 1112$ non è rappresentabile in quanto sono disponibili $s = 3$ cifre. Dal momento che quindi il suo primo elemento non può essere rappresentato, v non può essere rappresentato.

- Quali sono il minimo e il massimo numero di macchina positivo?

  Si è dimostrato che il minimo e massimo numero di macchina positivo sono

  $$r_1 = b^{-\nu}, \qquad r_2 = (1 - b^{-m})b^{b^s - \nu}.$$

  Sostituendo i valori di b, m, s, ν nel nostro caso otteniamo

  $$r_1 = 10^{-500}, \qquad r_2 = (1 - 10^{-4})10^{10^3 - 500} = 9.999 \cdot 10^{499}.$$

Esercizio 2.
Studiare il condizionamento dell'operazione di divisione di due numeri $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e del calcolo della radice quadrata di un numero positivo $y = \sqrt{x}$.

Condizionamento della divisione. Si veda dimostrazione a pagina 18 del libro di testo.

Condizionamento di $y = \sqrt{x}$. Si ricordi che in generale un'analisi del prim'ordine su $y = f(x)$ porta alla relazione

$$|\epsilon_y| \approx \left| f'(x) \frac{x}{y} \right| \cdot |\epsilon_x| = k|\epsilon_x|,$$

dove $\tilde{x} = x(1 + \epsilon_x)$ e $\tilde{y} = y(1 + \epsilon_y)$ sono il dato iniziale e il risultato corrispondente affetti da errore. Nel caso specifico, si ottiene (usando che $y = \sqrt{x}$)

$$|\epsilon_y| \approx \left| \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{x}{y} \right| \cdot |\epsilon_x| = \left| \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{x}{\sqrt{x}} \right| \cdot |\epsilon_x| = \frac{1}{2}|\epsilon_x|.$$

Esercizio 3.
Si consideri il metodo di bisezione per calcolare lo zero della funzione $f(x) = e^{x/20} - 1$ sull'intervallo $[-1, 1]$.

- Si stimi il numero d'iterazioni che garantisce di ottenere un'approssimazione x_i con tolleranza (sull'errore assoluto) di 10^{-5} (all'occorrenza si usi $\log_2(10^{-5}) \approx -16.6$).
  Ricordando che una stima dell'errore per l'approssimazione x_i (al passo i-simo) ottenuta col metodo di bisezione applicato all'intervallo $[a, b]$ è

  $$|x^* - x_i| \le \frac{b - a}{2^i},$$

  per garantire che una data tolleranza `tolx` sia soddisfatta è sufficiente imporre

  $$\frac{b - a}{2^i} \le \texttt{tolx},$$

  da cui

  $$i \ge \lceil \log_2(b - a) - \log_2(\texttt{tolx}) \rceil .$$

  Nel nostro caso si ottiene quindi

  $$i \ge \left\lceil \log_2(2) - \log_2(10^{-5}) \right\rceil = \lceil 1 + 16.6 \rceil = 18.$$

- Cosa si può dire sul condizionamento della radice $x^* = 0$?

  Ricordando che il condizionamento di una radice x^* è dato da

  $$k = \frac{1}{f'(x^*)},$$

  nel nostro caso, poiché $f'(x) = e^{x/20}/20$ e $x^* = 0$, otteniamo $k = 20$. In questo caso, quindi non è possibile affermare che la radice sia ben condizionata. Si osservi infatti che il valore della derivata $f'(x^*) = 1/20$ corrisponde (geometricamente) ad una funzione che é piuttosto "piatta"in un intorno non trascurabile di x^*, per cui per un'approssimazione x_k un valore "piccolo"di $f(x_k)$ non necessariamente corrisponde ad un "piccolo"errore e_k.

Esercizio 4.
Scrivere una function MATLAB che implementi il metodo delle secanti. La function deve avere come input la funzione di cui si vuole calcolare lo zero, le approssimazioni iniziali x_0 e x_1, un numero massimo d'iterazioni e una tolleranza. Come output, deve prevedere l'approssimazione finale. Si utilizzi il criterio d'arresto basato sulla distanza fra due iterazioni successive.

```
function x = secanti(f,x0,x1,imax,tolx)
fx0=f(x0);
fx1=f(x1);
x=(x0*fx1-x1*fx0)/(fx1-fx0);
for i=2:imax
  if abs(x-x1)<=tolx
    break
  end
  x0=x1; fx0=fx1;
  x1=x; fx1=f(x);
  x=(x0*fx1-x1*fx0)/(fx1-fx0);
end
```

Esercizio 5.
Si dimostri che il metodo di Newton converge almeno quadraticamente a radici semplici.

Si veda il Teorema 2.1 alle pagine 28-30 del libro di testo.

Esercizio 6.
Descrivere il metodo di accelerazione di Aitken, spiegando qual è la motivazione per la sua introduzione.

Si veda il libro di testo alle pagine 35-36 (trattazione del metodo di Aitken).