Prova di esonero relativa al capitolo 3 e relativa correzione

---

Esercizio 1 Scrivere una function Matlab che risolva un sistema lineare triangolare superiore, accedendo ai dati per colonne.

```
function x = Usolve( U, b )
%   function x = Usolve( U, b )   Risolve il sistema lineare U*x = b
%                                 con U matrice triangolare superiore
[m,n] = size(U);
k = length(b);
x = b(:);
if m~=n || n~=k, error('dati non consistenti'); end
for i=n:-1:1
     if U(i,i)==0, error('matrice singolare'); end
     x(i) = x(i)/U(i,i);
     x(1:i-1) = x(1:i-1)-x(i)*U(1:i-1,i);
end
return
```

Esercizio 2 Cosa significa dire che una matrice nonsingolare è fattorizzabile LU, e sotto quali condizioni questo è possibile? Spiegare, quindi, perché la seguente matrice A lo è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice è anche simmetrica e definita positiva (motivare la risposta)?

Una matrice A si dice fattorizzabile LU se si può fattorizzare nella forma $A = LU$, con L matrice triangolare inferiore a diagonale unitaria, e U matrice triangolare superiore.

La fattorizzazione esiste se e solo se tutti i minori principali di A sono non nulli.

Nel caso della matrice in esame, si ha: $\det(A_1) = 1$, $\det(A_2) = \det(A) = -99$. Pertanto la fattorizzazione esiste.

In particolare,

$$A = LU \equiv \begin{pmatrix} 1 & \\ 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ & -99 \end{pmatrix}.$$

La matrice A è chiaramente simmetrica, ma non definita positiva, essendo gli elementi diagonali di U non tutti positivi.

Esercizio 3 Avendo calcolato la fattorizzazione LU della matrice A del precedente esercizio, calcolarne l'inversa, utilizzando la fattorizzazione ottenuta; calcolarne, quindi, il numero di condizione, in norma 1 e ∞.

$$A = LU \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = U^{-1}L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 10/99 \\ & -1/99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ -10 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{99} \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}.$$

Poiché sia A che A^{-1} sono simmetriche, le loro norme 1 e ∞ sono uguali. Si ottiene, pertanto,

$$\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\| = 11 \times 11/99 = 121/99 = 11/9.$$

Esercizio 4 Dimostrare che, se $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ e $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è ortogonale, allora

$$\|Q\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2.$$

Dimostrare, quindi, che, se $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$, allora

$$\|QA\|_2 = \|A\|_2.$$

Poiché Q è ortogonale, $Q^\top Q = I$. Pertanto:

$$\|Q\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{(Q\boldsymbol{x})^\top Q\boldsymbol{x}} = \sqrt{\boldsymbol{x}^\top Q^\top Q\boldsymbol{x}} = \sqrt{\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x}} = \|\boldsymbol{x}\|_2.$$

Riguardo al secondo punto, denotando con $\rho(C)$ il raggio spettrale di una generica matrice quadrata C, si ottiene:

$$\|QA\|_2 = \sqrt{\rho\left((QA)^\top QA\right)} = \sqrt{\rho\left(A^\top Q^\top QA\right)} = \sqrt{\rho\left(A^\top A\right)} = \|A\|_2.$$

Alternativamente, il secondo punto si potrebbe dimostrare, in considerazione di quanto precedentemente dimostrato, anche come segue:

$$\|QA\|_2 = \sup_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\|QA\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} = \sup_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} = \|A\|_2.$$

Esercizio 5 Definire cosa si intende per fattorizzazione QR di una matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, con $m > n = \mathrm{rank}(A)$. Spiegare, quindi, come essa si utilizzi per risolvere il sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, dove $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ è un vettore noto, nel senso dei minimi quadrati.

Per il primo punto, si guardi il Teorema 3.8 del libro di testo. Per il secondo punto, si guardi il testo a seguire, fino alla (3.55).

Esercizio 6 Sia dato il vettore $\boldsymbol{x} = (2,\,1,\,2)^\top$. Calcolare la matrice elementare di Gauss L, e quella elementare di Householder H, che trasformano il vettore $\boldsymbol{x}$ in un multiplo del primo versore, $\boldsymbol{e}_1 = (1,\,0,\,0)^\top$.

Il vettore elementare di Gauss relativo al vettore $\boldsymbol{x}$ è

$$\boldsymbol{g} = \frac{1}{2}(0,\,1,\,2)^\top.$$

Pertanto si avrà

$$L = I - \boldsymbol{g}\boldsymbol{e}_1^\top = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ -1 & & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad L\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Riguardo al secondo punto, la matrice elementare di Householder sarà della forma

$$H = I - \frac{2}{\boldsymbol{v}^\top\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^\top,$$

con $\boldsymbol{v}$ vettore di Householder, quest'ultimo della forma $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{e}_1$, con

$$\alpha = \pm\|\boldsymbol{x}\|_2 = \pm 3.$$

Al fine di ottenere un perfetto conditionamento nel calcolo di $\boldsymbol{v}$, si sceglierà, in questo caso, $\alpha = -3$. Pertanto:

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad H = I - \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 25 & 5 & 10 \\ 5 & 1 & 2 \\ 10 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad H\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$