
Esercizio 1. Dimostrare che il polinomio interpolante una funzione $f(x)$ su $n+1$ ascisse distinte $x_0, \ldots, x_n$ esiste ed è unico.

Esercizio 2. Derivare la forma di Newton del polinomio interpolante definito dalle seguenti coppie di dati (x_i, f_i): (-1,1), (1,2), (3,4), (4,5).

Esercizio 3. Scrivere la forma di Newton del polinomio interpolante di Hermite definito dalle seguenti terne di dati (x_i, f_i, f_i'): (-1,0,1), (2,1,2).

Esercizio 4. Scrivere le ascisse di Chebyschev per costruire il polinomio di grado 4, interpolante una funzione sull'intervallo [0,4].

Esercizio 5. Definire una spline cubica su una partizione Δ assegnata. Quante condizioni sono necessarie per individuarne una specifica? Come sono definite queste condizioni per la spline cubica completa interpolante una funzione $f(x)$ sulla partizione assegnata?

Esercizio 6. Derivare l' espressione generale delle formule di Newton-Cotes.

Esercizio 7. Studiare il condizionamento delle formule di Newton-Cotes.

Esercizio 8. Scrivere l'espressione della formula composita di Simpson.

Esercizio 1. Vedere libro pag. 78, Teorema 4.1.

Esercizio 2.

x_i	f_i 0	1	2	3
-1	$\boxed{1}$			
1	2	$\boxed{\frac{1}{2}}$		
3	4	1	$\boxed{\frac{1}{8}}$	
4	5	1	0	$\boxed{-\frac{1}{40}}$

$\omega_0(x) \equiv 1$

$\omega_1(x) = (x+1)$

$\omega_2(x) = (x+1)(x-1)$

$\omega_3(x) = (x+1)(x-1)(x-3)$

pertanto: $p(x) = 1 + \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{8}(x+1)(x-1) - \frac{1}{40}(x+1)(x-1)(x-3)$.

Esercizio 3.

x_i	0	1	2	3
-1	$\boxed{0}$			
-1	0	$\boxed{1}$		
2	1	$\frac{1}{3}$	$\boxed{-\frac{2}{9}}$	
2	1	2	$\frac{5}{9}$	$\boxed{\frac{7}{27}}$

$\omega_0(x) \equiv 1$

$\omega_1(x) = (x+1)$

$\omega_2(x) = (x+1)^2$

$\omega_3(x) = (x+1)^2(x-2)$

pertanto, $p_H(x) = (x+1) - \frac{2}{9}(x+1)^2 + \frac{7}{27}(x+1)^2(x-2)$.

Esercizio 4. $x_i = 2 + 2\cos\left(\frac{2i+1}{10}\pi\right), \quad i = 0, 1, \ldots, 4.$

Esercizio 5. Sia $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ la partizione assegnata. Diremo che $s_3(x)$ è una spline cubica su Δ se: 1) $s_3\big|_{[x_{i-1}, x_i]}(x) \in \Pi_3$, $i = 1, \ldots, n$; 2) $s_3(x) \in C^{(2)}[a,b]$. Per individuare univocamente una spline cubica su Δ sono necessarie $n+3$ condizioni. Per la spline cubica interpolante $f(x)$ su Δ, si ha: $s_3(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$. Pertanto necessitano altre 2 condizioni che, per la spline completa, sono $s_3'(a) = f'(a)$, $s_3'(b) = f'(b)$.

Esercizio 6. Vedere libro pag. 106.

Esercizio 7. Vedere libro pag. 108.

Esercizio 8. Suddividendo l'intervallo di integrazione $[a,b]$ in n intervalli di uguale ampiezza, delimitati dalle ascisse $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$, $i = 0, \ldots, n$, con n pari, e denotando $f_i = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$, la formula composita di Simpson è data da

$$I_{2n}(f) = \frac{b-a}{3n}\left(f_0 + 4f_1 + f_2 + f_2 + 4f_3 + f_4 + \ldots + f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\right)$$

$$= \frac{b-a}{3n}\left[f_0 + 4\sum_{i=1}^{n/2} f_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} f_{2i} + f_n\right].$$