

Seduta del 21 febbraio 1989

SULLE SOLUZIONI DI EQUAZIONI ALLE DIFFERENZE DELL'ALGEBRA LINEARE NUMERICA

Nota di L. BRUGNANO e D. TRIGIANTE

Presentata da ILIO GALLIGANI, Accademico Corrispondente residente

INTRODUZIONE.

In alcune fattorizzazioni di matrici compaiono spesso delle equazioni alle differenze di tipo non lineare. La maggior parte delle volte queste sono equazioni del tipo di Riccati discrete e quindi riconducibili ad equazioni lineari, ma altre volte sono di altro tipo. In ogni caso, quando le dimensioni delle matrici sono elevate, sorgono delicati problemi di stabilità di uno o più punti di equilibrio. Anzi, considerando le varie sorgenti di errore, a cui corrispondono vari tipi di perturbazione delle equazioni stesse, si hanno problemi di stabilità totale o, più spesso, di stabilità pratica. Naturalmente, poiché le matrici provengono in genere dalla discretizzazione di equazioni differenziali rappresentanti leggi fisiche «stabili», le equazioni alle differenze dipendono in genere da parametri i cui ranges di variabilità garantiscono a priori certe proprietà di stabilità. Non è però escluso che lo studio di certi fenomeni fisici «non usuali» come, ad esempio, la turbolenza in fluidodinamica possa portare allo studio di equazioni con parametri variabili in altri ranges. Scopo di questa nota è quello di discutere alcuni esempi di fenomeni nonlineari in alcuni casi ben noti.

1. MATRICI TRIDIAGONALI.

Prendiamo, per semplicità, la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \gamma & \beta & & & & & & & & & \\ \mathbf{1} & \gamma & \beta & & & & & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & & & & & \cdot & \cdot & \beta & & \\ & & & & & & & \mathbf{1} & \gamma & & \end{bmatrix}_{N \times N}.$$

e quindi si avrà la consueta nozione di stabilità dell'Analisi Numerica. La condizione $\Delta > 0$ è verificata se la matrice iniziale è a diagonale dominante, cioè se $\gamma > 1 + |\beta|$. Infatti in tal caso si ha $\gamma^2 - 4|\beta| > (1 + |\beta|)^2 - 4|\beta| = (1 - |\beta|)^2 > 0$.

Nel caso $\Delta = 0$, la soluzione è data

$$(1.4) \quad \alpha_i = \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{i+1}{i},$$

ed anche in questo caso si ha una relazione analoga alla (1.3)

$$r_1 \equiv r_2 = \gamma/2 \leq \alpha_i \leq \gamma.$$

Cioè, come nel caso precedente, la soluzione rimane limitata e tende al punto di equilibrio r_2 .

Dal punto di vista dell'Analisi Numerica vi è però una differenza sostanziale tra i due casi. Consideriamo infatti una qualunque perturbazione dovuta, ad esempio, ai vari tipi di errori introdotti nei calcoli. Consideriamo quindi l'equazione

$$(1.5) \quad \tilde{\alpha}_i = \gamma - \frac{\beta}{\tilde{\alpha}_{i-1}} + \delta_i$$

Sottraendo la (1.1) e ponendo $\varepsilon_i = \tilde{\alpha}_i - \alpha_i$, si ottiene

$$\varepsilon_i = \frac{\beta \varepsilon_{i-1}}{(\alpha_{i-1} + \varepsilon_{i-1}) \alpha_{i-1}} + \delta_i,$$

da cui si ottiene, supponendo che $|\varepsilon_i|$ sia trascurabile rispetto ad α_i ,

$$(1.6) \quad |\varepsilon_i| \leq \left| \frac{\beta}{\alpha_{i-1}^2} \right| |\varepsilon_{i-1}| + |\delta_i|.$$

In ogni caso, tenendo conto delle (1.3) e (1.4), si verifica facilmente che

$$\left| \frac{\beta}{\alpha_{i-1}^2} \right| \leq \sigma = \left| \frac{4\beta}{\gamma^2} \right|.$$

La soluzione della (1.6) è quindi maggiorata da

$$|\varepsilon_i| \leq \sigma^i \varepsilon_0 + \sum_{j=0}^{i-1} \sigma^{i-j-1} |\delta_j| \leq \sigma^i \varepsilon_0 + \frac{1 - \sigma^i}{1 - \sigma} \max |\delta_j|.$$

Nel primo caso ($\Delta > 0$) è $\sigma < 1$ e quindi

$$|\varepsilon_i| \leq \varepsilon_0 + \frac{1}{1 - \sigma} \max_{0 \leq j \leq i} |\delta_j|,$$

da cui si desume che se le perturbazioni sono limitate, allora la soluzione della (1.1), e cioè gli elementi sulla diagonale della matrice L , è limitata (in Analisi Numerica si parla in tal caso di stabilità in senso forte).

Nel secondo caso ($\Delta = 0$), essendo $\sigma \geq 1$, si ha, nella migliore delle ipotesi ($\sigma = 1$),

$$(1.7) \quad |\varepsilon_i| \leq |\varepsilon_0| + i \cdot \max_{0 \leq j \leq i} |\delta_j|,$$

e quindi l'errore cresce con l'indice i , ottenendosi la stabilità debole dell'Analisi Numerica.

Nel caso $\Delta < 0$, le cose cambiano radicalmente. Per fare una analogia di comportamento, ricordiamo brevemente il caso della equazione logistica discreta. Come è noto lo studio del comportamento delle soluzioni di questa equazione ha dato origine agli studi sul caos (ved. [1], [3], [4]). L'equazione logistica discreta è

$$y_{n+1} = ay_n(1 - y_n), \quad a > 0.$$

Questa equazione serve per descrivere vari fenomeni naturali, ad esempio la crescita di popolazioni in presenza di risorse limitate. Essa ha due punti di equilibrio: lo zero e $\bar{y} = (a - 1)/a$. Per $a < 1$ l'origine è asintoticamente stabile. Per $a = 2$ si può dare la soluzione esplicita che è

$$y_n = \frac{1}{2} (1 - (1 - 2y_0)^{2^n}).$$

Per $a > 3$ la soluzione \bar{y} diventa instabile, ma diventa stabile un ciclo di ordine 2, cioè la soluzione oscilla tra due valori. Al crescere di a tra 3 e 3.5 compaiono le soluzioni periodiche di periodo $2^2, 2^3, 2^4, \dots$: in tal caso, si parla di «cascate di raddoppi del periodo» (vedi fig. 1). Oltre questo valore di a appaiono soluzioni di periodo 3. Vi è un celebre risultato di Li e Yorke il quale stabilisce che se per un dato valore del parametro vi è un ciclo di periodo 3, allora vi sono cicli di periodo intero qualunque. Un risultato più generale era stato ottenuto da Sharkovskii il quale stabiliva la successione

$$3, 5, 7, \dots, 3 * 2, 5 * 2, \dots, 3 * 2^2, 5 * 2^2, \dots, 3 * 2^n, 5 * 2^n, \dots, 2^m, \dots, 4, 2, 1$$

e dimostrava che per ogni equazione $y_{n+1} = f(y_n)$, con f unimodale, se esiste un ciclo di ordine p , esiste anche un ciclo di ordine q , con q successivo a p nella successione precedente (ved. [5]). Questo fenomeno è stato chiamato caos.

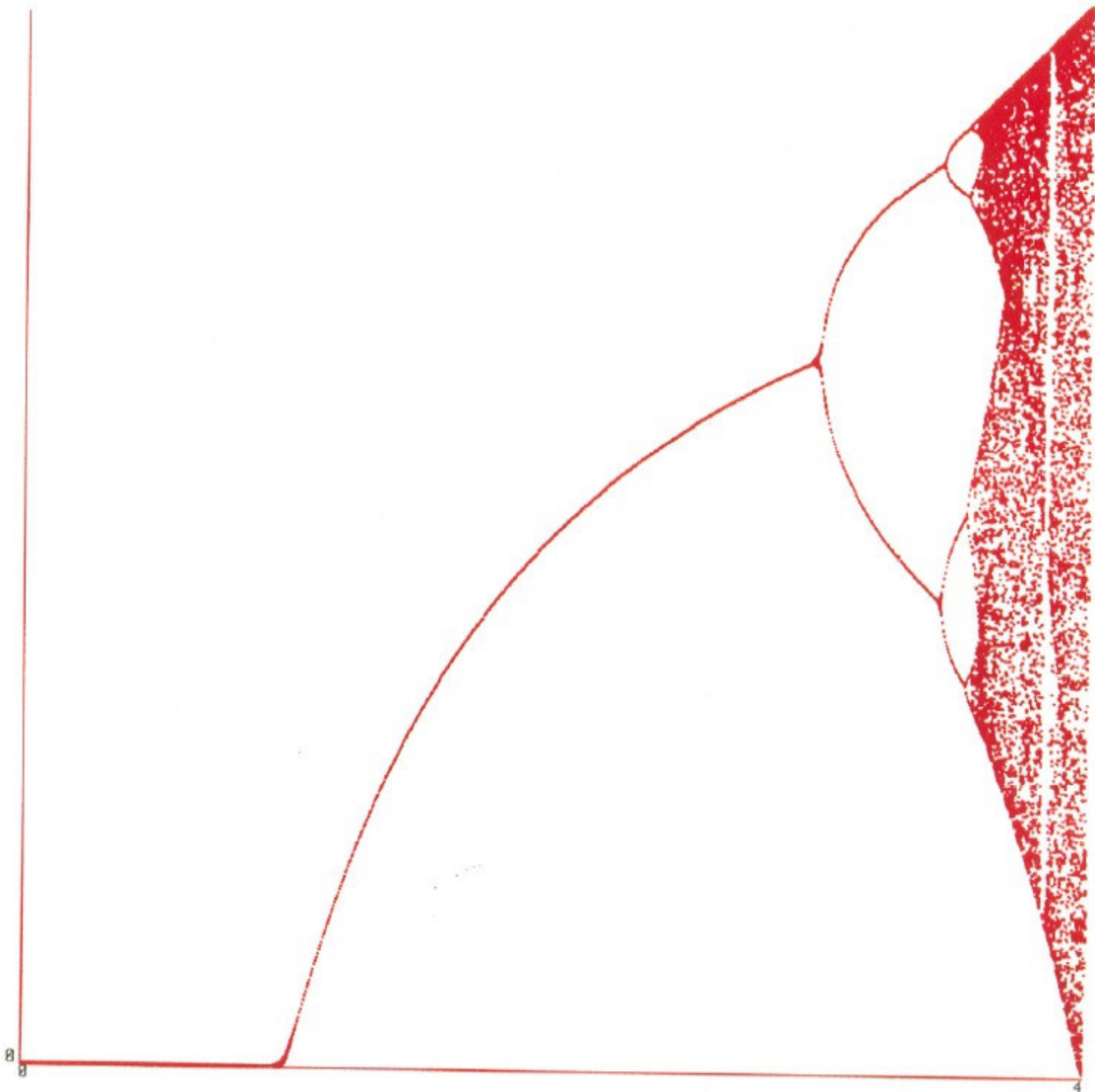


Fig. 1.

Torniamo alla nostra equazione. Qui la situazione è simile, ma non identica. Innanzitutto la f non è unimodale e non trasforma un intervallo finito in sé stesso. I fenomeni a cui dà luogo però somigliano, per ricchezza di comportamenti, a quelli descritti. Per vederlo poniamo (supponendo $\beta = 1$)

$$\alpha_n = \frac{P_n}{D_n},$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} P_{n+1} \\ D_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_n \\ D_n \end{pmatrix} \equiv A \begin{pmatrix} P_n \\ D_n \end{pmatrix},$$

la cui soluzione è

$$\begin{pmatrix} P_n \\ D_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} P_0 \\ D_0 \end{pmatrix},$$

Per ottenere le soluzioni periodiche di periodo n della (1.1), con $\beta = 1$, deve essere $A^n = \pm I$.

TEOREMA. — *Condizione necessaria è sufficiente affinché, per $n > 1$, sia $A^n = \pm I$ è che si abbia*

$$(1.8) \quad \gamma = 2 \cos \frac{k\pi}{n}$$

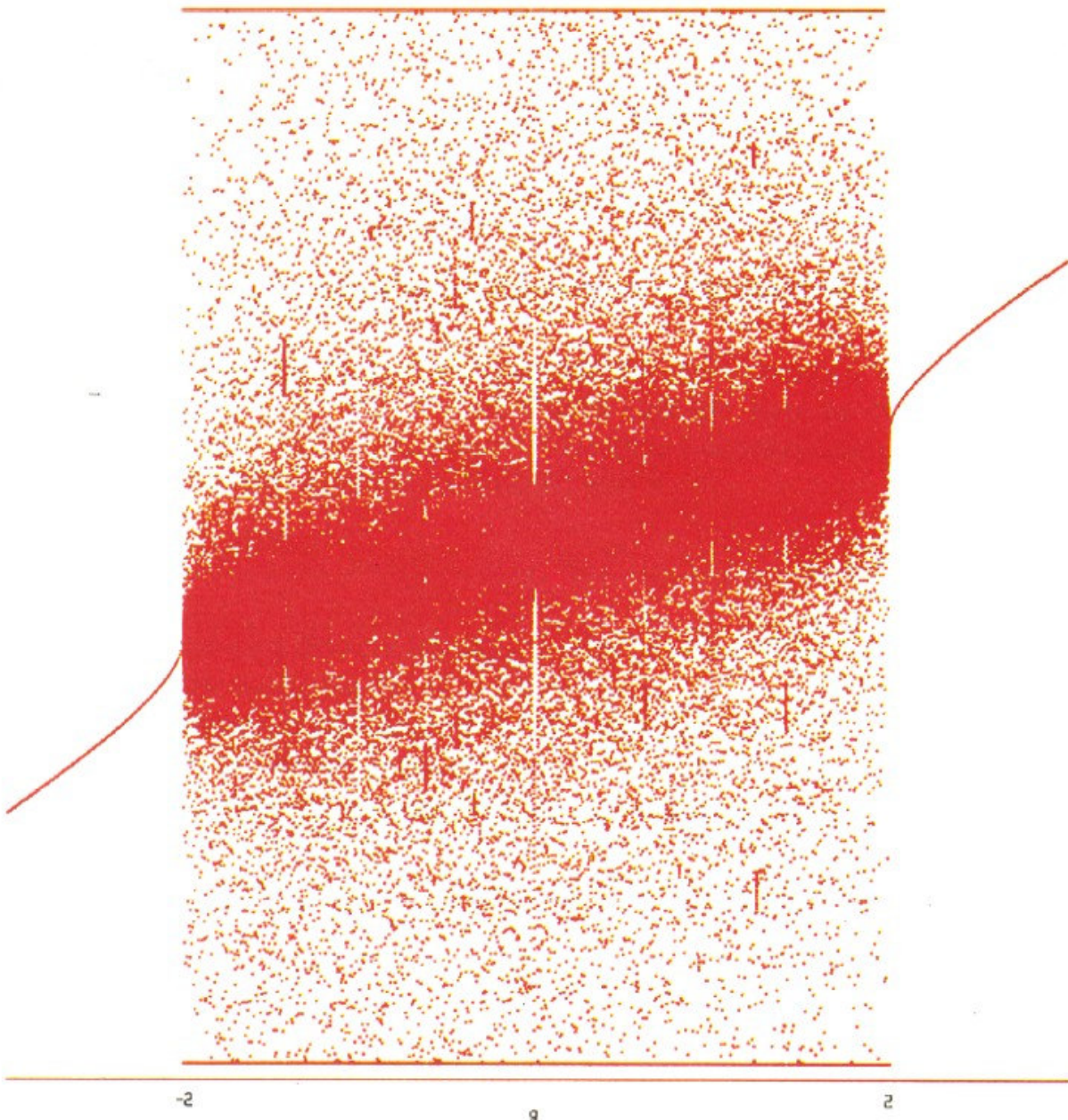


Fig. 2.

Dim. — La dimostrazione si basa sull'osservazione, facilmente verificabile, che, per ogni valore di $n \geq 0$, si ha

$$A^n = \begin{pmatrix} U_n(\gamma/2) & -U_{n-1}(\gamma/2) \\ U_{n-1}(\gamma/2) & -U_{n-2}(\gamma/2) \end{pmatrix},$$

dove U_n è il polinomio di Chebishev di seconda specie di grado n . Poiché non vi sono radici di $U_{n-1}(\gamma/2)$ per $|\gamma| > 2$, è evidente che per tali valori di γ non vi sono soluzioni periodiche di periodo superiore ad 1. Difatti abbiamo già visto che in tal caso tutte le soluzioni tendono ad r_2 . Per $|\gamma| < 2$, compaiono una infinità di soluzioni periodiche. Per ogni valore di n vi sono $n - 1$ soluzioni di

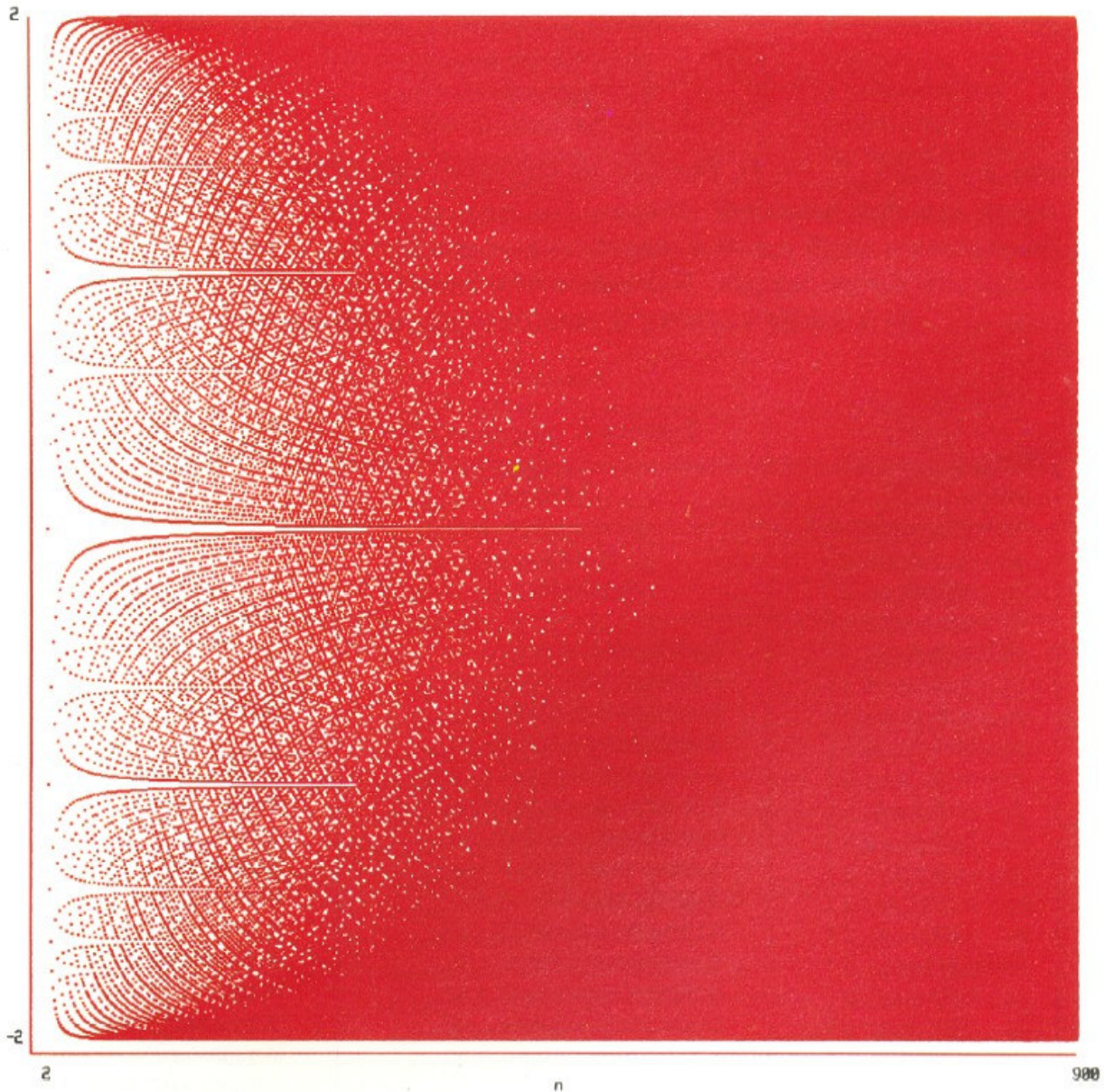


Fig. 3.

periodo n : basta prendere i valori di γ che annullano $U_{n-1}(\gamma/2)$, e cioè i valori forniti dalla (1.8).

Osservazione. — Anche considerando, nella (1.8), solo valori di k che non abbiano fattori in comune con n , cioè eliminando i cicli di ordine n ottenuti come cicli multipli di ordine più basso, si vede facilmente che, per γ vicino a 2 e a -2 , vi è un addensamento di soluzioni periodiche del tipo già osservato per l'equazione logistica. Si ottiene la situazione riportata in fig. 2. Nella fig. 3 sono riportati i valori di γ , per cui si hanno cicli di periodo esatto n , per $n = 2, 3, \dots, 900$.

Naturalmente la soluzione dei sistemi lineari, quando $\Delta < 0$, rispecchia il comportamento degli α_i appena descritto. Nelle tabelle 1 e 2, sono riportati per vari valori di n (= dimensione problema) e γ le soluzioni dei sistemi

$$Ax = b$$

ove $A = \text{trid}(-1, \gamma, -1)$. Per fare un confronto significativo si sono eseguiti i calcoli con due precisioni diverse. Nel caso $\Delta > 0$ (tab. 1), si vede che la propagazione degli errori è trascurabile e che l'errore finale è dello stesso ordine dell'errore iniziale. Nel caso $\Delta < 0$, invece, la rapida propagazione è evidente. Ma è anche evidente il carattere imprevedibile, «caotico», di tale

TABELLA 1. — ($\gamma = 5, \Delta > 0$).

Soluzione		
esatta	16 cifre significative	8 cifre significative
1	0.1000000000000000E + 01	0.10000000E + 01
2	0.2000000000000000E + 01	0.20000000E + 01
3	0.3000000000000000E + 01	0.30000000E + 01
4	0.4000000000000000E + 01	0.40000000E + 01
5	0.5000000000000000E + 01	0.50000000E + 01
6	0.6000000000000000E + 01	0.59999999E + 01
7	0.7000000000000000E + 01	0.69999999E + 01
8	0.8000000000000000E + 01	0.80000000E + 01
9	0.9000000000000000E + 01	0.90000000E + 01
10	0.1000000000000000E + 02	0.99999998E + 01
11	0.1100000000000000E + 02	0.11000000E + 02
12	0.1200000000000000E + 02	0.12000000E + 02
13	0.1300000000000000E + 02	0.13000000E + 02
14	0.1400000000000000E + 02	0.14000000E + 02
15	0.1500000000000000E + 02	0.15000000E + 02

TABELLA 2. - ($\gamma = 0.6180339$, $\Delta < 0$).

Soluzione		
esatta	16 cifre significative	8 cifre significative
1	0.1000000000000000E + 01	0.10000000E + 01
2	0.2000000000000000E + 01	0.20000000E + 01
3	0.3000000000000000E + 01	0.30000000E + 01
4	0.4000000000000000E + 01	0.40000000E + 01
5	0.5000000000000000E + 01	0.49999998E + 01
6	0.5999999999534339E + 01	0.60000008E + 01
7	0.6999999999712206E + 01	0.70000006E + 01
8	0.8000000000287795E + 01	0.80000006E + 01
9	0.9000000000465661E + 01	0.90000000E + 01
10	0.1000000000000000E + 02	0.99999996E + 01
11	0.1099999999953434E + 02	0.10999999E + 02
12	0.1199999999971221E + 02	0.12000000E + 02
13	0.1300000000028779E + 02	0.13000000E + 02
14	0.1400000000046566E + 02	0.14000000E + 02
15	0.1500000000000000E + 02	0.15000000E + 02
16	0.1600000000009901E + 02	0.16875001E + 02
17	0.1700000000006119E + 02	0.17540780E + 02
18	0.1799999999993881E + 02	0.17459220E + 02
19	0.1899999999990099E + 02	0.18125000E + 02
Soluzione		
esatta	16 cifre significative	8 cifre significative
1	0.1000000000000000E + 01	-0.10000000E - 06
2	0.2000000000000000E + 01	0.13819660E + 01
3	0.3000000000000000E + 01	0.36180342E + 01
4	0.4000000000000000E + 01	0.50000000E + 01
5	0.5000000000000000E + 01	0.49999996E + 01
6	0.5999999999534339E + 01	0.50000008E + 01
7	0.6999999999712206E + 01	0.63819668E + 01
8	0.8000000000287795E + 01	0.86180350E + 01
9	0.9000000000465661E + 01	0.10000000E + 02
10	0.1000000000000000E + 02	0.99999991E + 01
11	0.1099999999953434E + 02	0.99999980E + 01
12	0.1199999999971221E + 02	0.11381966E + 02
13	0.1300000000028779E + 02	0.13618035E + 02
14	0.1400000000046566E + 02	0.15000000E + 02
15	0.1500000000000000E + 02	0.14999999E + 02
16	0.1600000000000000E + 02	0.15000001E + 02
17	0.1700000000000000E + 02	0.16381968E + 02
18	0.1800000000000000E + 02	0.18618035E + 02
19	0.1900000000000000E + 02	0.20000000E + 02
20	0.2000000000000000E + 02	0.19999999E + 02

propagazione. Infatti l'errore cambia notevolmente a seconda della precisione usata e, *anche*, nel passaggio della dimensione n alla dimensione $n + 1$ (tab. 2).

2. MATRICI PENTADIAGONALI.

Supponiamo sempre, per semplicità, che gli elementi su ciascuna diagonale non nulla siano costanti. Anche in questo caso la fattorizzazione LU viene definita mediante una equazione alle differenze nonlineare del tipo

$$(2.1) \quad y_n = \gamma - \frac{t}{y_{n-1}} - \frac{w}{y_{n-k}},$$

ove k è la larghezza della banda della matrice A e gli y_n sono gli elementi sulla diagonale della matrice L . In questo caso l'equazione non è trasformabile in un sistema (o una equazione) lineare. Tuttavia si possono ottenere risultati simili a quelli del caso precedente. Ponendo

$$x_+ = \begin{cases} x & \text{per } x \geq 0, \\ 0 & \text{per } x < 0, \end{cases} \quad x_- = \begin{cases} 0 & \text{per } x \geq 0, \\ x & \text{per } x < 0, \end{cases}$$

si ha:

TEOREMA. — Sia $\Delta = \gamma^2 - 4(t_+ + w_+) \geq 0$, m tale che $\frac{1}{2}(\gamma - \Delta^{1/2}) \leq m \leq \frac{1}{2}(\gamma + \Delta^{1/2})$, e $y_j \geq m$, $j = 1, 2, \dots, k$.

Allora per $j > k$ si ha:

$$m \leq y_j \leq \gamma - (t_- + w_-) m^{-1}.$$

Dim. — Ved. [2].

Come conseguenza si ha che, nelle ipotesi del teorema,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} y_j = r_2,$$

ove r_2 è la radice di modulo più grande dell'equazione

$$r^2 - sr + (t + w) = 0.$$

Nello spazio (s, t, w) esistono delle regioni di stabilità per l'equazione alle differenze (2.1). Naturalmente, si dovranno risolvere le altre due equazioni alle differenze derivanti dalla risoluzione dei due sistemi triangolari superiore

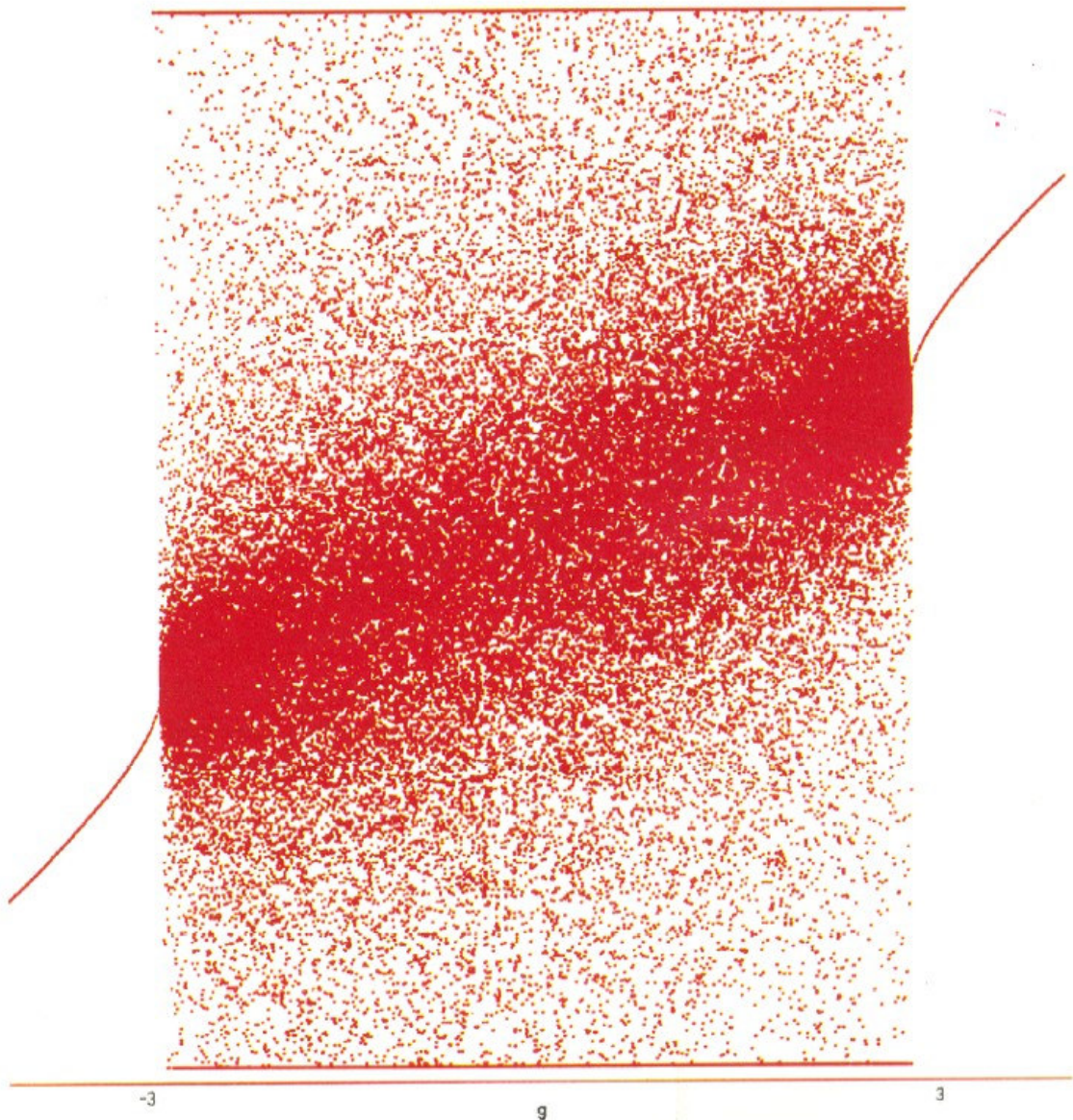


Fig. 4.

ed inferiore. Ciò porta ad altre limitazioni sui tre parametri e quindi alle suddette regioni di stabilità.

Quello che succede nelle regioni di instabilità è simile a quanto succedeva nel caso precedente. Nella fig. 4 abbiamo riportato il comportamento delle soluzioni per l'equazione

$$y_n = \gamma - \frac{1}{y_{n-1}} - \frac{1}{y_{n-2}}.$$

Anche in questo caso se $|\gamma| < 2$ vi è una situazione di tipo caotico e, per quel che riguarda la soluzione dei sistemi, si può dire quanto detto nel caso precedente.

3. RIDUZIONE CICLICA.

Un metodo per la soluzione dei sistemi tridiagonali e pentadiagonali che può essere classificato nella famiglia dei metodi «divide and conquer» (il rappresentante più illustre di questa famiglia è la *FFT*) è il seguente. Sia P una matrice di permutazione che trasforma la successione $1, 2, 3, \dots, N = 2^m - 1$ nella successione $1, 3, \dots, N, 2, 4, \dots, N - 1$.

Partendo dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & & & & & \\ c & a & b & & & & \\ & c & \cdot & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & a & b \\ & & & & & c & a \end{pmatrix}_{N \times N},$$

la matrice PAP^T ha la forma

$$PAP^T = \begin{pmatrix} aI & S_1 \\ S_2 & aI \end{pmatrix},$$

con

$$S_1 = \begin{pmatrix} b & & & & \\ c & b & & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & b \\ & & & & c & b \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} c & b & & & \\ \cdot & c & b & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & b \\ & & & & c \end{pmatrix}.$$

La matrice PAP^T può essere fattorizzata nella forma (poniamo $A_1 = A$)

$$PA_1P^T = \begin{pmatrix} I & 0 \\ a^{-1}S_2 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} aI & S_1 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

con $A_2 = aI - a^{-1}S_2S_1$. La matrice A_2 è tridiagonale, per cui si può riptere lo stesso ragionamento ottenendo un'altra fattorizzazione nel sottospazio di dimensione $(N-1)/2$, e così via.

Il metodo appena descritto viene chiamato metodo della riduzione ciclica o metodo even-odd (oppure black and white) (ved. ad es. [6], [7]). Di solito è presentato in maniera più complicata. Ad esempio (ved. [8]) si definisce una permutazione Q che porta la successione naturale $1, 2, \dots, N$ nella successione

$$1, 3, 5, \dots, 3 * 2, 5 * 2, \dots, 3 * 2^2, 5 * 2^2, \dots, 2^{m-1},$$

e si applica la fattorizzazione LU alla matrice QAQ^T . È interessante notare che, escludendo il primo elemento, questa successione è dello stesso tipo di quella di Sharkovskii.

La relazione che intercorre tra gli elementi sulle diagonali delle matrici A_i è la seguente:

$$a_i = a_{i-1} - 2 \frac{b_{i-1}c_{i-1}}{a_{i-1}}, \quad b_i = -\frac{b_{i-1}^2}{a_{i-1}}, \quad c_i = -\frac{c_{i-1}^2}{a_{i-1}}.$$

Questo è un sistema di equazioni alle differenze del primo ordine. Si può dimostrare che:

1) se la matrice iniziale è diagonale dominante, anche le successive matrici A_i lo sono;

2) escludendo A_1 , il prodotto degli elementi extradiagonali $b_i c_i$ è sempre positivo; ciò significa che gli autovalori delle matrici A_i sono reali;

3) se la matrice A è simmetrica e con diagonale strettamente dominante, allora $A_i \rightarrow D$, per $i > \hat{i}$, essendo D una matrice diagonale ad elementi costanti.

Le precedenti proprietà indicano che le successive matrici migliorano le proprietà di stabilità della matrice di partenza. Nel caso in cui la matrice di partenza non sia diagonale dominante, allora si hanno interessanti proprietà. Per semplificare le cose, supporremo che A sia simmetrica. Si verifica facilmente che tutte le A_i sono simmetriche. In questo caso il sistema può ridursi ad un'unica equazione alle differenze del secondo ordine. Infatti, dopo semplici manipolazioni, si arriva alla equazione:

$$a_i = \frac{1}{2} \left(a_{i-1} + a_{i-2} \left(2 - \frac{a_{i-2}}{a_{i-1}} \right) \right).$$

Possiamo semplificare ulteriormente l'equazione, ponendo

$$y_i = \frac{a_{i+1}}{a_i} - \frac{1}{2},$$

pervenendo all'equazione più semplice

$$(3.1) \quad y_i = \frac{y_{i-1}}{\left(y_{i-1} + \frac{1}{2} \right)^2}.$$

Si verifica facilmente che per $y_0 > 0$, tutte le soluzioni tendono asintoticamente al punto di equilibrio $\bar{y} = 1/2$. La condizione $y_0 > 0$, equivale a

$$\frac{a - 2b^2/a}{a} > \frac{1}{2},$$

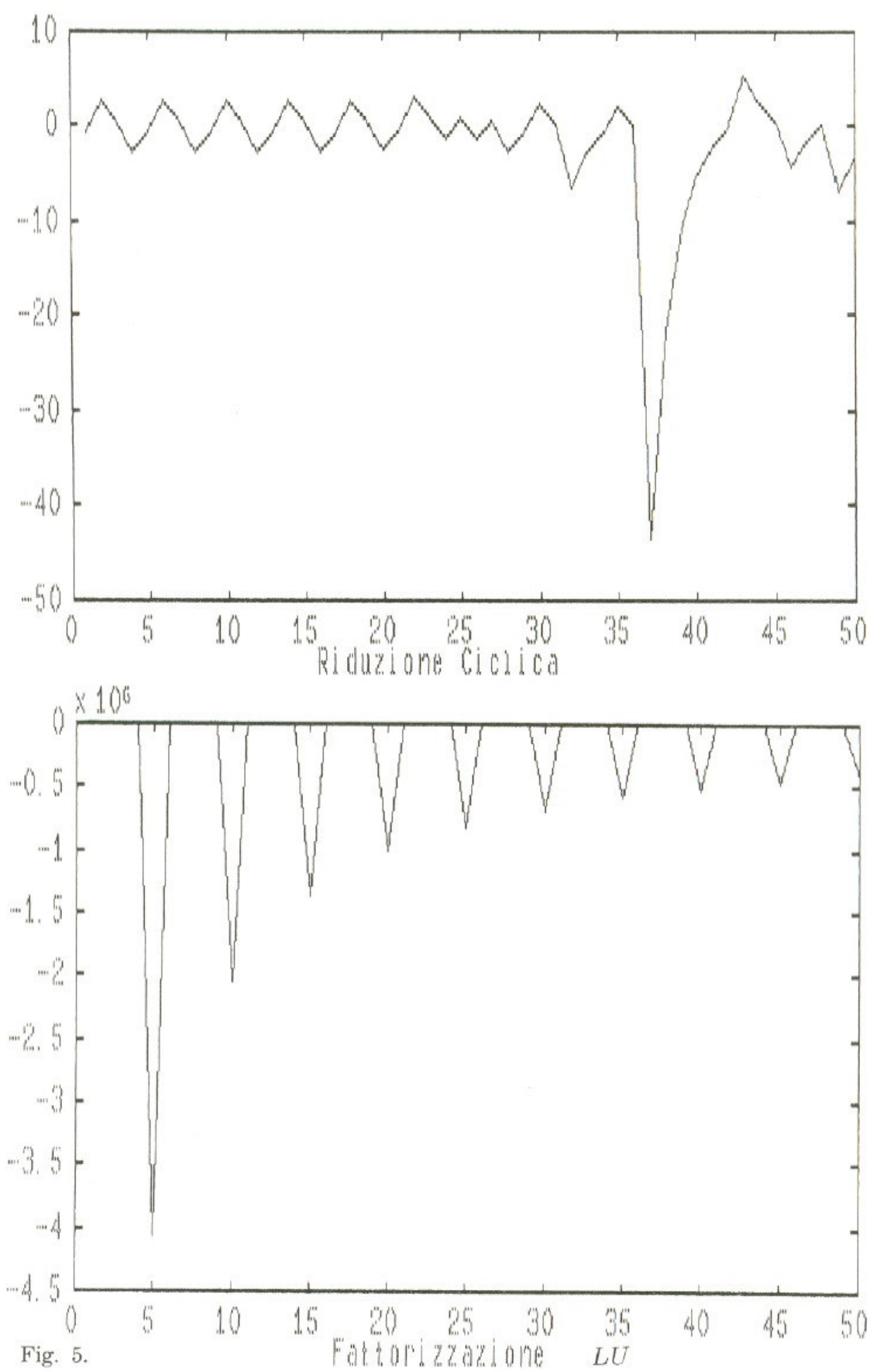


Fig. 5.

cioè

$$a^2 - 4b^2 > 0$$

che è la solita $\Delta > 0$. Quest'ultima condizione, quindi, garantisce l'asintotica stabilità del punto di equilibrio anche in questo caso. Conseguentemente sarà garantita anche la limitatezza delle a_i .

Per $y_0 < 0$, che ovviamente corrisponderà al caso $\Delta < 0$, il comportamento delle soluzioni è molto più ricco. Anche qui compaiono cicli periodici e quanto detto precedentemente si può ripetere. Dal punto di vista «sperimentale», si può dire che le soluzioni, a partire dagli stessi parametri, oscillano mediamente meno rispetto ai casi precedenti (ved. fig. 5). Quindi la propagazione numerica degli errori è, statisticamente, meno sfavorevole.

4. MAPPE DI POINCARÉ E METODO DI NEWTON PER LA DETERMINAZIONE DELLE ORBITE PERIODICHE.

Anche se le soluzioni periodiche, in tutti i casi considerati, sono un'infinità numerabile, la loro localizzazione non è, in genere, agevole. Infatti, solo nel primo caso (cfr. sez. 1) è stato possibile individuare esplicitamente i valori del parametro γ in corrispondenza dei quali si ottenevano tali soluzioni. In generale, si deve ricorrere a metodi numerici approssimati.

Per determinare le orbite periodiche di periodo n di mappe del tipo

$$(4.1) \quad y_{i+1} = f(y_i),$$

come, ad esempio, la (3.1), si può considerare la mappa discreta di Poincaré:

$$(4.2) \quad z_{i+1} = f^{(n)}(z_i),$$

dove $f^{(n)}$ è la n -esima iterata di f .

Le orbite di periodo n della (4.1), saranno date, quindi, dai punti fissi della (4.2), ossia dagli zeri di:

$$G(z) = z - f^{(n)}(z).$$

Per determinare tali zeri, si può utilizzare il metodo di Newton:

$$(4.3) \quad \tilde{z}_{i+1} = \tilde{z}_i - \frac{G(\tilde{z}_i)}{G'(\tilde{z}_i)},$$

a partire da un punto iniziale \tilde{z}_0 . Osserviamo che:

$$G'(\tilde{z}_i) = 1 - \prod_{k=0}^{n-1} f'(f^{(k)}(\tilde{z}_i)),$$

TABELLA 3.

y_0	periodo orbita
-2.6393202250021E - 001	2
-1.1595705673981E - 001	3
-9.9114291110784E - 002	4
-9.2077907924488E - 002	5
-1.0796105076639E - 001	6
-9.9996680922900E - 002	7
-3.3310229468509E - 001	8
-1.0108746390052E - 001	9
-1.0010052875346E - 001	10
-9.9990195988985E - 002	11
-9.9935100408294E - 002	12
-1.0005826416702E - 001	13
-3.3002827871461E - 001	14
-9.9989793844046E - 002	15

per cui, la (4.3) diviene:

$$\tilde{z}_{i+1} = \frac{f^{(n)}(\tilde{z}_i) - \tilde{z}_i \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f'(f^{(k)}(\tilde{z}_i))}{1 - \prod_{k=0}^{n-1} f'(f^{(k)}(\tilde{z}_i))}.$$

La tabella 3 si riferisce al caso della (3.1): in essa sono riportati alcuni valori di y_0 , in corrispondenza dei quali si hanno le soluzioni periodiche di periodo indicato.

BIBLIOGRAFIA

- [1] V. LAKSHMIKANTHAM e D. TRIGIANTE: *Theory of difference equations: Numerical methods and applications*, Academic Press (1988).
- [2] G. DI LENA e D. TRIGIANTE: *Stability and spectral properties of incomplete factorization*, in press on Japan Journ. of Appl. Math.
- [3] R. M. MAY: *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, Nature, **261**, 459 (1986).
- [4] T. Y. LI e J. A. YORKE: *Period three implies chaos*, Am. Math. Monthly, **82**, 985 (1982).
- [5] P. STEFAN: *A theorem of Sharkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphism of the real line*, Comm. Math. Phys., **54**, 237 (1977).
- [6] G. H. GOLUB e C. VAN LOAN: *Matrix Computations*, J. Hopkins Press (1983).
- [7] H. L. BUBZEE, G. H. GOLUB e C. W. NIELSON: *On direct methods for solving Poisson's equations*, SIAM JNA, **7**, 627-656 (1970).
- [8] D. KERSHAW: *Solution of single tridiagonal linear systems and vectorization of ICCG algorithm on the Cray-1*, Parallel Computations (1983).