Corso di Laurea in Matematica

I compito di ALGEBRA I – 12 gennaio 2015

Esercizio 1. (6 punti) Siano A, B insiemi, $f : A \to B$ e $g : B \to A$ applicazioni tali che g è suriettiva e $f \circ g = \iota_B$.

1. Si provi che $g = f^{-1}$;
2. si dica se, in generale, l'affermazione del punto precedente rimane vera anche senza l'ipotesi che g sia suriettiva.

Esercizio 2. (11 punti) Sull'insieme $\mathcal{A} = \{X \subseteq \mathbb{Z} \mid |X| < \infty\}$ si definisca la relazione $\lhd$ ponendo, per ogni $X, Y \in \mathcal{A}$,

$$X \lhd Y \text{ se } \begin{cases} X \cap \mathbb{N} \subseteq Y \cap \mathbb{N} \\ X \cap \mathbb{N}^- \supseteq Y \cap \mathbb{N}^- \end{cases}$$

dove $\mathbb{N}^- = \{z \in \mathbb{Z} \mid z < 0\}$.

1. Si provi che $\lhd$ è una relazione d'ordine su $\mathcal{A}$ e si dica se è totale;
2. si dica se l'insieme parzialmente ordinato $(\mathcal{A}, \lhd)$ ha elementi minimali;
3. avendo posto, per $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \{x \in \mathbb{Z} \mid -n \leq x \leq n\}$, si determini, se esiste, l'estremo superiore del sottoinsieme $\mathcal{B} = \{B_n \mid 0 \leq n \leq 5\}$.

Esercizio 3. (8 punti) Fissato un numero primo positivo p, sia $D = \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$ (ovvero, $D = \{z \in \mathbb{Z} \mid p \nmid z\}$). Su $D \times D$ si definisca la relazione ω ponendo, per ogni $(a, b), (c, d) \in D \times D$

$$(a, b)\omega(c, d) \text{ se } p | ad - bc.$$

1. Si provi che ω è una relazione d'equivalenza su $D \times D$;
2. si provi che l'insieme $\{(1, k) \in D \times D \mid 1 \leq k \leq p - 1\}$ è un sistema di rappresentanti per l'insieme quoziente $(D \times D)/\omega$.

Esercizio 4. (7 punti) Si risolva in $\mathbb{Z}$ il seguente sistema alle congruenze:

$$\begin{cases} x^{100} + 66x^{66} + 100x^{10} \equiv 1 \pmod{35} \\ (6x)^{14} \equiv x + 2 \pmod{7} \end{cases}.$$