Corso di Laurea in Matematica 2014-2015

compito prova di ALGEBRA I

Esercizio 1. (4 punti) Si provi che per ogni $2 \leq n \in \mathbb{N}$ vale l'identità:

$$6 \cdot \sum_{i=2}^{n} \binom{i}{2} = (n-1)n(n+1).$$

Esercizio 2. (9 punti) Sull'insieme $A = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ si definisca la relazione ω ponendo, per ogni $f, g \in A$, $f\omega g$ se

$$\{f(0), \ldots, f(n)\} = \{g(0), \ldots, g(n)\} \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}$$

1. Si provi che ω è una relazione d'equivalenza su A.
2. Si provi che $[f]_\omega = \{f\}$ se f è iniettiva.
3. Dire se il porre, per $f \in A$, $[f]_\omega \mapsto f(2)$ fornisce una buona definizione di un'applicazione $A/\omega \to \mathbb{N}$.

$*$ Si provi che se $2 \leq |Im(f)| < \infty$ allora $[f]_\omega$ contiene infiniti elementi.

Esercizio 3. (9 punti) Su $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ (dove $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$) si definisca la relazione $\preceq$ ponendo, per ogni $(a,b), (c,d) \in A$,

$$(a,b) \preceq (c,d) \quad \text{se} \quad (a,b) = (c,d) \;\; \text{oppure} \;\; \begin{cases} a \leq c \\ a \leq d - b \end{cases}$$

1. Si provi che $\preceq$ è una relazione d'ordine su A; si dica se è totale.
2. Si determinino gli elementi minimali di $(A, \preceq)$; si dica se c'è un minimo.
3. Si determini, se esiste, l'estremo superiore di $\{(2,3), (3,2)\}$.

Esercizio 4. (5 punti) Siano $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Si provi che

$$(b,c) = 1 \Rightarrow (a, bc) = (a,b)(a,c).$$

Esercizio 5. (5 punti) Si trovino le soluzioni intere della congruenza:

$$(x^{123} + x^{321})^2 \equiv 555x \pmod{35}$$

.