Corsi di Laurea in Matematica. Esame di Algebra I.

Esame scritto - 20 luglio 2015

Esercizio 1. (9 punti) Una funzione $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la diciamo *aumentante* se $\alpha(n) \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Su $\Lambda = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ iniettiva}\}$ si definisca la relazione $\leq$ ponendo, per ogni $f, g \in \Lambda$, $f \leq g$ se esiste una funzione aumentante $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tale che $g = f\alpha$.

(1) Si provi che $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ sono aumentanti anche $\alpha \circ \beta$ lo è;

(2) si provi che $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ è aumentante e invertibile se e solo se $\alpha = \iota_{\mathbb{N}}$ [sugg. sia α aumentante e invertibile: ragionando per induzione su n si provi che $\alpha^{-1}(n) = n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$];

(3) si provi che $\leq$ è una relazione d'ordine su Λ.

Esercizio 2. (5 punti) Si risolva in $\mathbb{Z}$ la seguente congruenza:

$$x^{2222} + (x-2)^{2222} \equiv -2222 \pmod 7.$$

Esercizio 3. (10 punti) Posto $\mathbb{Z}_7 = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, sia

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \Big| a, b \in \mathbb{Z}_7 \right\}.$$

Si verifica facilmente che E è un sottoanello di $M(2 \times 2, \mathbb{Z}_7)$ [**non occorre** provare questo]

(1) si provi che E è un campo e che esiste $\mathbf{u} \in E$ che è radice di $x^2 + 1 \in E[x]$;

(2) si determini un omomorfismo (iniettivo) $\mathbb{Z}_7 \to E$;

(3) si provi che $E \simeq \frac{\mathbb{Z}_7[x]}{(x^2+1)}$ [sugg.: mediante il principio di sostituzione, estendere in modo opportuno a $\mathbb{Z}_7[x]$ l'omomorfismo al punto precedente, quindi...]

Esercizio 4. (4 punti) Siano R un anello, $\phi : R \to R$ un omomorfismo e I un ideale di R. Si provi che $S = \{x \in R \mid x - \phi(x) \in I\}$ è un sottoanello di R.

Esercizio 5. (5 punti) Si dica per quali $k \in \mathbb{N}$ l'ideale $(x^3 - 2^k x - 3)$ è un ideale massimale di $\mathbb{Q}[x]$.