Corsi di Laurea in Matematica. Esame di Algebra I.
Esame scritto - 4 settembre 2015

Esercizio 1. (9 punti) Sull'insieme $\Omega = \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} = \{f \mid f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\}$ si definisca la relazione $\sim$ ponendo, per ogni $f, g \in \Omega$, $f \sim g$ se

$$\textit{esiste } a \in \mathbb{Z} \textit{ tale che } f(x+a) = g(x) + a \textit{ per ogni } x \in \mathbb{Z}.$$

(1) Si provi che $\sim$ è una relazione d'equivalenza su Ω;
(2) si dica se e quali fra i seguenti sottoinsiemi di Ω sono classi di equivalenza:

$$\mathcal{A} = \{f \in \Omega \mid \exists q \in \mathbb{Z} : f(x) = x + q \text{ per ogni } x \in \mathbb{Z}\}$$

$$\mathcal{B} = \{f \in \Omega \mid \exists q \in \mathbb{Z} : f(x) = 2x + q \text{ per ogni } x \in \mathbb{Z}\};$$

(3) si provi che l'insieme quoziente $\Omega/\sim$ è infinito.

Esercizio 2. (5 punti) Si risolva in $\mathbb{Z}$ il seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 3x^{111} + 111x^3 \equiv x \pmod 7 \\ x^3 + x^2 + x \equiv 1 \pmod 7 \end{cases}$$

Esercizio 3. (7 punti) Sia

$$R = \left\{ \frac{n}{m} \in \mathbb{Q} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N},\ (m,n) = 1,\ (m,6) = 1 \right\}$$

(1) si provi che R è sottoanello di $\mathbb{Q}$ e si determinino i suoi elementi invertibili;
(2) si determinino, a meno di associati, gli elementi irriducibili di R;

Esercizio 4. (6 punti) Siano R un anello, I e S, rispettivamente, un ideale ed un sottoanello di R.

(1) Si provi che $I + S = \{x + a \mid x \in I,\ a \in S\}$ è un sottoanello di R, contenente (ovviamente come ideale) I;
(2) si provi che $S/S \cap I \simeq (I + S)/I$.

Esercizio 5. (6 punti) Nell'anello $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}[x]$ si considerino i polinomi

$$f = x^4 + 4x^2 + 4 \qquad g = x^4 - 2x^2 - 2x + 8.$$

Si trovi $h \in Z/7\mathbb{Z}[x]$ tale che $(h) = (f) + (g)$.