Corso di Laurea in Matematica
I compito di ALGEBRA II
12 novembre 2012

Esercizio 1. (5 punti) Sia G un gruppo ciclico finito e siano $g, h \in G$ con $|g| = n$ e $|h| = m$.

1. Si determini $|\langle g \rangle \cap \langle h \rangle|$.
2. Si determini $|\langle g \rangle \langle h \rangle|$.

Soluzione.

1. Per il teorema di Lagrange $|\langle g \rangle \cap \langle h \rangle|$ divide sia n che m, quindi divide il massimo comun divisore $d = (n, m)$. Dato che G è ciclico, possiede un unico sottogruppo D di ordine d. Poiché $\langle g \rangle$ ha un sottogruppo di ordine d, che è anche un sottogruppo di G, segue $D \leq \langle g \rangle$. Analogamente $D \leq \langle h \rangle$ Quindi $D = \langle g \rangle \cap \langle h \rangle$ e pertanto $|\langle g \rangle \cap \langle h \rangle| = (n, m)$.
2. Applicando la formula del prodotto

$$|\langle g \rangle \langle h \rangle| = \frac{|\langle g \rangle||\langle h \rangle|}{|\langle g \rangle \cap \langle h \rangle|} = \frac{n \cdot m}{(n, m)} = [n, m].$$

Esercizio 2. (9 punti) Siano

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Q}, a, c \neq 0 \right\} \quad \text{e} \quad K = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & u \end{pmatrix} : u, v \in \mathbb{Q}, u \neq 0 \right\}.$$

1. Si provi che G è un gruppo (rispetto all'usuale prodotto righe per colonne).
2. Si provi che K è un sottogruppo normale di G.
3. Si dimostri che $K = A \times B$, con $A, B \leq K$, A isomorfo al gruppo moltiplicativo $\mathbb{Q}^\times$ dei razionali diversi da zero e B isomorfo al gruppo additivo $\mathbb{Q}$.

Soluzione.

1. Si prova, applicando il criterio per sottogruppi, che $G \leq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$.
2. Si prova che K è un sottogruppo di G e che K è normale in G, applicando il criterio per sottogruppi e il criterio di normalità.
3. Siano

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{Q}, a \neq 0 \right\} \quad \text{e} \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Si prova che A e B sono sottogruppi normali di K (si può osservare che K è commutativo). Si ha inoltre $A \cap B = \{1\}$ e $AB = K$ (infatti $\begin{pmatrix} u & v \\ 0 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u^{-1}v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$).

Si verifica, infine, che $\alpha : A \to Q^{\times}$ definita da $\alpha\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = a$ e $\beta : B \to Q$ definita da $\beta\left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = b$ sono isomorfismi.

Esercizio 3. (9 punti) Sia $G = S_6$.

1. Quante sono le classi di coniugio di elementi di ordine 6 di G ? E quante quelle di elementi di ordine 12 ?
2. È vero che ogni elemento di ordine 3 di G è il quadrato di un elemento di ordine 6 ?
3. Sia H un gruppo ciclico di ordine 12 che opera fedelmente sull'insieme $S = \{1, 2, \ldots, 7\}$. Si provi che H <u>non ha</u> punti fissi.

Soluzione.

1. In S_6 vi sono due classi di coniugio di elementi di ordine 6, precisamente la classe di coniugio delle permutazioni che sono prodotto di un 3-ciclo e di un 2-ciclo (disgiunti), e la classe di coniugio costituita dai 6-cicli. (Si ricordi che in un gruppo simmetrico c'è (una e) una sola classe di coniugio per ogni tipo ciclico.)

   Non vi sono classi di coniugio di elementi di ordine 12 in S_6, dato che S_6 non possiede elementi di ordine 12 (come si verifica elencando i possibili tipi ciclici).
2. In S_6 ogni elemento di ordine 3 è coniugato a (123) oppure a $(123)(456)$. Dato che (123) è il quadrato della permutazione $(132)(45)$ e $(123)(456)$ è il quadrato di (142536), si conclude sfruttando le proprietà del coniugio.

   Alternativamente: se $\pi \in S_6$ è un elemento di ordine 3, allora nella rappresentazione in prodotto di cicli disgiunti $\pi = (abc)$ e quindi $\pi = ((acb)(de))^2$ oppure $\pi = (abc)(efg)$ e allora $\pi = ((aebfcg))^2$.
3. Se H avesse un punto fisso i, allora agirebbe fedelmente su $I = \{1, 2, \ldots, 7\} \setminus \{i\}$. Dunque H sarebbe isomorfo ad un sottogruppo di $Sym(I) \simeq S_6$; ma, come osservato al punto 1, S_6 non ha sottogruppi ciclici di ordine 12.

   Alternativamente: osservare che H è isomorfo ad un sottogruppo di S_7 e che gli unici elementi di ordine 12 di S_7 sono, nella decomposizione in cicli disgiunti, prodotto di un 3-ciclo e di un 4-ciclo.

Esercizio 4. (8 punti)

1. Sia G un gruppo tale che $|G| = pqrt$ con p, q, r, t primi (non necessariamente distinti). Si dimostri che se $p > qrt$ allora G ha sottogruppi di ordini, rispettivamente, pq, pr e pt.
2. Si provi che il gruppo alterno A_5 non ha sottogruppi di ordine 15.

Soluzione.

1. Dal secondo teorema di Sylow segue che $n_p = 1$, quindi G ha un unico p-sottogruppo di Sylow P, e dunque $P \trianglelefteq G$. Applicando il primo teorema di Sylow al gruppo quoziente G/P e il teorema di corrispondenza, esiste H sottogruppo di G con $P \leq H$ e tale che $|H/P| = q$ (infatti q divide $|G/P|$). Quindi $|H| = |P|q = pq$. Nello stesso modo si dimostra l'esistenza di sottogruppi di ordini pr e pt.

   Alternativamente: se $q = p$, allora esiste $H \leq G$ con $|H| = p^2 = pq$ per il primo teorema di Sylow; se $q \neq p$, si considera un sottogruppo Q di G tale che $|Q| = q$ (esiste per il primo teorema di Sylow) e si osserva che $PQ \leq G$ (dato che $P \trianglelefteq G$) e che $|PQ| = |P||Q|/|P \cap Q| = pq$.
2. Un gruppo di ordine 15 è necessariamente ciclico (prodotto diretto dei suoi sottogruppi di Sylow) e A_5 non ha elementi di ordine 15 (come si verifica dall'analisi dei tipi ciclici).

   Alternativamente: se esistesse $H \leq A_5$ con $|H| = 15$, allora $[G : H] = 4$ e l'azione di G sulle classi laterali di G modulo H darebbe un omomorfismo da A_5 ad un gruppo simmetrico su 4 oggetti. Tale omomorfismo è necessariamente iniettivo, perchè il suo nucleo non è A_5 e A_5 è semplice. Ma ciò è assurdo, perchè 5 non divide l'ordine di un gruppo simmetrico su 4 oggetti.