Corso di Laurea in Matematica
II compito di ALGEBRA II
8 gennaio 2012

Esercizio 1. (7 punti) Sia F campo e sia E campo di spezzamento su F del polinomio $x^4 + 1 \in F[x]$. Si determini il grado $[E : F]$ nei casi:

1. $F = \mathbb{Q}$;
2. $F = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;
3. $F = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Esercizio 2. (4 punti) Siano F un campo, E un campo di spezzamento del polinomio $0 \neq f \in F[x]$, e $a \in E$ una radice multipla (cioè con molteplicità ≥ 2) di f. Sia g il polinomio minimo di a su F; si provi che ogni radice di g è una radice multipla di f.

Esercizio 3. (12 punti) Sia $f = 2x^3 + 6x^2 - 9$ e sia E campo di spezzamento di f su $\mathbb{Q}$.

1. Si provi che $u = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}} - 1$ è l'unica radice reale di f;
2. si determini - come tipo di isomorfismo - il gruppo $G = Gal(E|\mathbb{Q})$;
3. si provi che esiste un'unico campo intermedio L con $[L : \mathbb{Q}] = 2$ e che f è irriducibile in $L[x]$;
4. si dica se E contiene una radice primitiva terza dell'unità.

Esercizio 4. (4 punti) Sia $E|F$ un'estensione di Galois e sia $G = Gal(E|F)$. Sia $u \in E$; si provi che le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. $E = F[u]$.
2. $\sigma(u) \neq u$ per ogni $1 \neq \sigma \in G$.

Esercizio 5. (5 punti) Sia $F = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ con p primo. Si provi che il polinomio $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ è irriducibile in $F[x]$ se e solo se $p \not\equiv \pm 1 \pmod 5$.