Corso di Laurea in Matematica

Compito di ALGEBRA II

16 luglio 2013

Esercizio 1. (9 punti) Siano $a, b \in Sym(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ definite da, per ogni $\bar{z} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$,

$$a(\bar{z}) = \bar{z} + \bar{1}, \qquad b(\bar{z}) = -\bar{z}.$$

Si ponga infine $A = \langle a \rangle$, $B = \langle b \rangle$ (sottogruppi di $Sym(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$).

1. Si provi che $G = AB$ è un gruppo e si determini il suo ordine.
2. Si provi che se $\phi : G \to \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ è un omomorfismo allora $\ker(\phi) = G$.
3. Si determini la classe di coniugio di b in G.

Esercizio 2. (9 punti) Sia G il sottogruppo di $Sym(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ dell'esercizio precedente.

1. Si provi che se per $g \in G$ esistono $\bar{z}, \bar{w} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, con $\bar{z} \neq \bar{w}$, tali che $g(\bar{z}) = \bar{z}$ e $g(\bar{w}) = \bar{w}$, allora $g = 1_G$.
2. Si provi che porre, per $g \in G$ e $(\bar{z}, \bar{w}) \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$,

   $$g \cdot (\bar{z}, \bar{w}) = (g(\bar{z}), g(\bar{w}))$$

   definisce un'azione fedele di G su $\Omega = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$.
3. Si provi che se $\bar{z} \neq \bar{w}$ allora $|O_G((\bar{z}, \bar{w}))| = 10$.

Esercizio 3. (10 punti) Posto $F = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, si consideri $f = x^3 - 5 \in F[x]$.

1. Si provi che f è irriducibile in $F[x]$.
2. Denotato con E il campo di spezzamento di f su F, si determini $[E : F]$ e $Gal(E|F)$.
3. Si provi che $E|\mathbb{Q}$ è un'estensione normale.

Esercizio 4. (5 punti) Sia $x^5 - 1 \in F[x]$ dove $F = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Si determini il grado del campo di spezzamento di f su F. Stesse domande con F campo di ordine 49 e campo di ordine 343.