Corso di Laurea in Matematica

Compito di ALGEBRA II

25 giugno 2013

Esercizio 1. (7 punti) Sia G un gruppo.

1. Siano M, N sottogruppi normali di G; si provi che se G/N e G/M sono abeliani allora $G/(N \cap M)$ è abeliano.
2. Siano $H \leq G$ e $N \trianglelefteq G$; si provi che se G/N è abeliano allora $H/(H \cap N)$ è abeliano.

Esercizio 2. (9 punti) Sia G un gruppo di ordine 231.

1. si provi che esiste un omomorfismo non banale $G \to C_3$ (dove C_3 è un gruppo ciclico di ordine 3);
2. si provi che G contiene un elemento di ordine 77;
3. si provi che se G contiene un sottogruppo ciclico e normale di ordine 21 allora G è ciclico.

Esercizio 3. (10 punti) Posto $u = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$:

1. si determini il polinomio minimo f di u su $\mathbb{Q}$;
2. si dica se $\mathbb{Q}[u] = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$;
3. posto E il campo di spezzamento di f su $\mathbb{Q}$, si determini $Gal(E|\mathbb{Q})$;
4. posto $L = E \cap \mathbb{R}$, si determini $[L : \mathbb{Q}]$.

Esercizio 4. (6 punti)

1. Siano E un campo di ordine 32 e F il suo sottocampo fondamentale; si dica quanti sono i campi intermedi tra F ed E.
2. Sia f un fattore irriducibile del polinomio $x^{32} - x$ in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$; si provi che $f = x,\ f = x - 1$ oppure $\deg(f) = 5$.