Corso di Laurea in Matematica

Compito di ALGEBRA II

4 febbraio 2013

Esercizio 1. (8 punti) Sia p un numero primo e $G = S_p$ il gruppo simmetrico.

(a) Si determini il numero di elementi di G di ordine divisibile per p.

(b) Sia P un p-sottogruppo di Sylow di G. Si determinino gli ordini dei sottogruppi $C_G(P)$ e $N_G(P)$.

Esercizio 2. (8 punti) Dato un intero positivo n, sia $G = \langle g \rangle$ un gruppo ciclico di ordine n e $U = \{\bar{a} : a \in \mathbb{Z}, (a, n) = 1\}$ il gruppo delle unità dell'anello $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Si provi che porre

$$\bar{a} \cdot x = x^a$$

per $\bar{a} \in U$ e $x \in G$, definisce una azione di U su G.

Nel caso $n = p^m$ con p primo e $n \geq 1$, si provi che due elementi $x, y \in G$ appartengono alla stessa orbita se e solo se hanno lo stesso ordine. Infine, si determini l'ordine $|U_x|$ dello stabilizzatore di x in U quando $n = 243$ e $x = g^{141}$.

Esercizio 3. (4 punti) Sia $0 < r \in \mathbb{R}$; si provi che r è trascendente su $\mathbb{Q}$ se e soltanto se $\sqrt[3]{3r}$ è trascendente su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 4. (12 punti) Sia $f = x^6 - 2x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ e sia $E \subseteq \mathbb{C}$ il suo campo di spezzamento.

(a) Si provi che $\alpha = \sqrt[3]{1+\sqrt{3}}$ e $\beta = \sqrt[3]{1-\sqrt{3}}$ sono le sole radici reali di f;

(b) Posto $\zeta = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}$, si descrivano tutte le radici di f in funzione di α, β e ζ;

(c) si provi che E coincide con il campo si spezzamento su $\mathbb{Q}$ del polinomio $(x^2 - 3)(x^3 - 2)$, e si determini il grado $[E : \mathbb{Q}]$;

(d) si provi che $E = \mathbb{Q}[\alpha, i]$ e che $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}[\beta]$;

(e) si determini il gruppo di Galois $Gal(E|\mathbb{Q})$.