Corso di Laurea in Matematica
Compito di ALGEBRA II
18 gennaio 2013

Esercizio 1. (8 punti) Siano

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_7,\ a, c \neq 0 \right\} \quad \text{e} \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{Z}_7, \right\} .$$

1. Si provi che G è un gruppo e che N è un sottogruppo normale di G.
2. Determinare l'ordine nel gruppo quoziente G/N dell'elemento gN con $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Si provi che l'applicazione $\phi : G \to (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times$ definita da
$$\phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = ac ,$$
per $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G$, è un omomorfismo.

Esercizio 2. (8 punti) Sia G un gruppo di ordine 2013.

1. Provare che G ha sottogruppi di ordine $3 \cdot 11$ e $11 \cdot 61$ e che questi sono ciclici.
2. Dimostrare che 11 divide l'ordine del centro $Z(G)$.
3. Posto $t = |\{g \in G \ : \ |g| = 3\}|$, provare che $t = 122$ oppure G è ciclico (e $t = 2$).

Esercizio 3. (12 punti) Sia $\omega \in \mathbb{C}$ una radice primitiva 9-esima dell'unità.

1. Trovare il polinomio minimo di ω su $\mathbb{Q}$.
2. Posto $E = \mathbb{Q}[\omega]$, provare che $E|\mathbb{Q}$ è normale e determinare il gruppo $G = Gal(E|\mathbb{Q})$.
3. Trovare (come combinazione lineare di potenze di ω) elementi $u, v \in E$ tali che $[\mathbb{Q}[u] : \mathbb{Q}] = 3$ e $[\mathbb{Q}[u] : \mathbb{Q}] = 2$.
4. Posto $\Omega = \{\omega^i \ : \ 0 \leq i \leq 8\}$ l'insieme delle radici di $x^9 - 1$, si dica quante sono le orbite di G su Ω.

Esercizio 4. (4 punti) Sia $E|F$ un'estensione di campi e sia $a \in E$ tale che $[F(a) : F] = pq$ con p, q primi, $p < q$. Provare che

$$F[a^{p-1} + a] = F[a]$$

.